

# La Transformada Cuántica de Fourier desde Cero

Diego Rodríguez

8 de junio de 2023



# Índice general

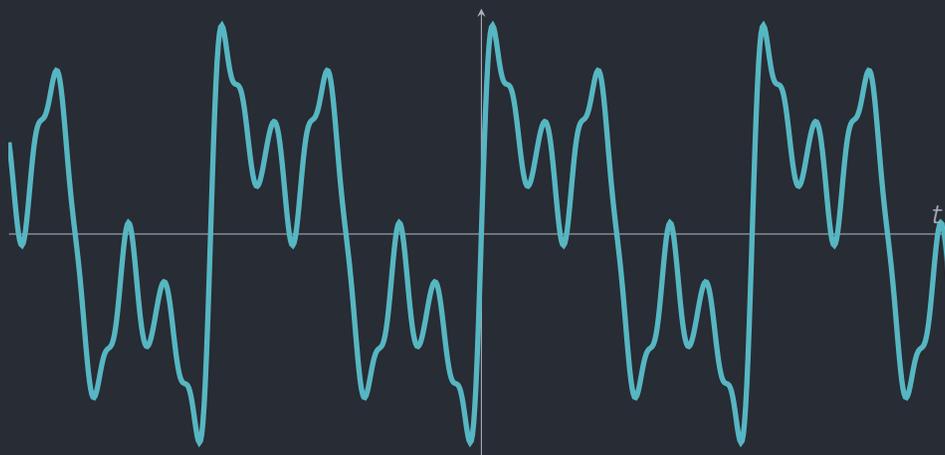
<b>Introducción</b>	<b>I</b>
0.1. ¿Qué es la Transformada de Fourier?	I
0.2. Computación Cuántica y sus implicaciones en ciberseguridad	III
<b>1. Geometría</b>	<b>1</b>
1.1. Vectores Geométricos: Interpretación Polar	1
1.2. Vectores Geométricos: Interpretación Cartesiana	6
1.3. Producto Punto	13
1.4. Ortogonalidad y dimensiones superiores	17
1.5. Planos	21
1.6. Producto Cruz	23
1.7. Cambio de base	24
<b>2. Vectores Abstractos</b>	<b>29</b>
2.1. El sistema decimal	29
2.2. Funciones	35
2.3. Restricciones en el espacio	41
2.4. La Serie de Fourier	44
2.5. La Serie de Fourier: Versión Compleja	51
2.6. La Transformada de Fourier	54
2.7. La Transformada Discreta de Fourier: Señales Digitales	56
2.8. La Transformada Discreta de Fourier: Versión Matricial	60
2.8.1. Ejemplo para 4 puntos	63
<b>3. Computación Cuántica</b>	<b>65</b>
3.1. Introducción a la Computación Cuántica	65
3.2. Compuertas Cuánticas	66
3.3. Estados de múltiples qubits	68
3.4. Transformada Cuántica de Fourier	71
3.5. Transformada Cuántica de Fourier: Versión Tensorial	72
3.5.1. Ejemplo: QFT para 1 qubit	76
3.5.2. Ejemplo: QFT para 2 qubits	77
3.6. Transformada Cuántica de Fourier: Circuito Cuántico	79

3.7. Algoritmo de Shor . . . . .	81
3.7.1. Algoritmo de Shor: parte clásica . . . . .	81
3.7.2. Algoritmo de Shor: parte cuántica . . . . .	81
<b>A. Trigonometría</b>	<b>83</b>
A.1. Pitágoras . . . . .	83
A.2. Funciones Trigonométricas . . . . .	85
A.3. Suma y resta de ángulos . . . . .	89
<b>B. Cálculo</b>	<b>93</b>
B.1. Serie de Taylor . . . . .	93
B.2. Regla de L'Hôpital . . . . .	96
<b>C. Álgebra Matricial</b>	<b>97</b>
C.1. Matrices . . . . .	97
C.2. Suma de Matrices . . . . .	98
C.3. Producto Matricial . . . . .	98
C.4. Base ortonormal . . . . .	101
<b>D. Números Complejos</b>	<b>103</b>
D.1. La unidad imaginaria . . . . .	103
D.2. Identidad de Euler . . . . .	105
D.3. Conjugados . . . . .	106
D.4. Magnitud de Números Complejos . . . . .	106
D.5. Notación Bra-Ket . . . . .	107
<b>E. Notación Tensorial</b>	<b>111</b>
E.1. Tensores . . . . .	111
E.2. Producto Tensorial . . . . .	112

# Introducción

## 0.1. ¿Qué es la Transformada de Fourier?

Imagina que grabas una guitarra tocando y obtienes la siguiente señal de audio:



Y te piden que digas qué notas está tocando, o qué acorde es. Con la representación actual, ¿es posible saberlo? En cambio, si nos presentaran la siguiente descomposición de armónicos de la señal:

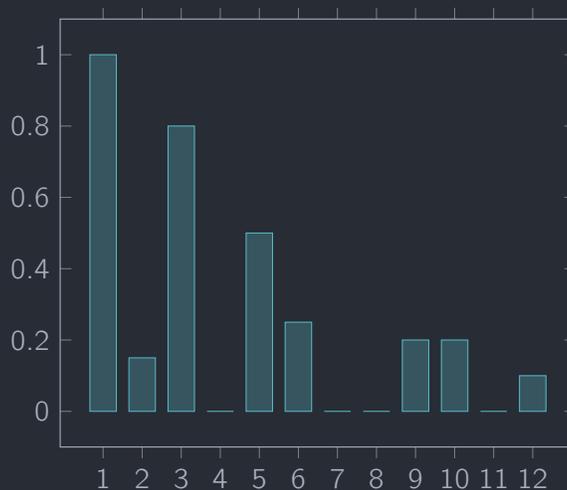


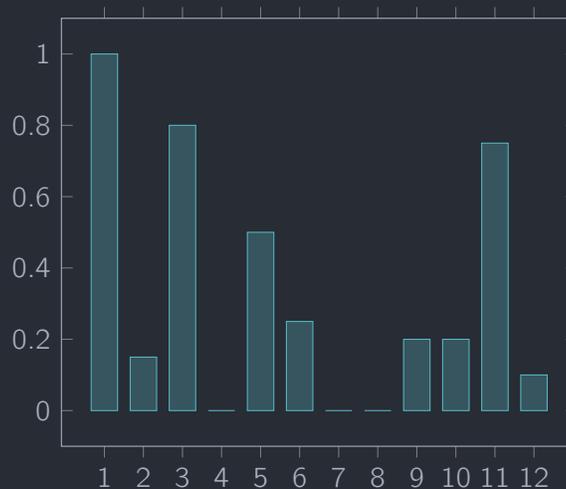
Figura 0.1: Descomposición de armónicos para una señal de sonido, partiendo de la fundamental en 1.

De aquí podemos ver que la frecuencia base está tocada, y que predominan los armónicos 3 y 5, lo cual compone un acorde mayor. Es la misma señal, pero diferente representación, en términos de frecuencias en vez de tiempo,

que nos da información que no hubiera sido posible obtener fácilmente de la representación inicial. Ahora imagina que grabamos la misma guitarra, pero con ruido externo. Por simplicidad, tenemos exactamente una frecuencia que está perturbando la grabación y metiendo ruido indeseado en nuestra señal:



Si quisiéramos quitar ese ruido indeseado partiendo desde esta gráfica, es prácticamente imposible. Podemos darnos cuenta a simple vista que es diferente que la anterior, pero no podríamos decir exactamente cómo. Sin embargo, si nos vamos a ver la gráfica de los armónicos la identificamos fácilmente:



Identificamos rápidamente que el armónico 11 nos está causando problemas y lo podemos quitar con algún filtro. Lo mismo pasa para las señales eléctricas cuando estamos escuchando la radio. Las emisoras mandan una señal de una frecuencia específica y la radio la sintoniza de acuerdo a la frecuencia que seleccionamos, lo que nos permite cambiar de emisora e incluso escuchar únicamente ruido en medio cuando no le damos a una frecuencia específica. También se utiliza este análisis para limpiar señales eléctricas en circuitos y en computadoras, y con esto se hacen también los filtros de todo tipo.

## 0.2. Computación Cuántica y sus implicaciones en ciberseguridad

En el caso anterior atacábamos un problema que parecía imposible desde las herramientas que teníamos y que se resolvió fácilmente con la nueva herramienta, y lo mismo ocurre con la versión cuántica de la Transformada de Fourier, conocida como la Transformada Cuántica de Fourier (QFT, por sus siglas en inglés *Quantum Fourier Transform*). En resumidas cuentas, la mayoría de la encriptación que se tiene hoy en día en el mundo digital gira alrededor de la descomposición de primos. El concepto de esta encriptación se basa en que es muy fácil encontrar dos números coprimos<sup>1</sup> y multiplicarlos entre sí para obtener un número con solo esos dos divisores. De esta manera se tienen estos números como llaves: con uno se encripta y con el otro se decripta, y el problema es que encontrar los números a partir de su producto es un problema muy difícil. Imagina que tenemos el número  $N = 3\,729\,128\,794\,384\,975\,751\,840\,016\,353\,009\,671\,520\,070\,090\,360\,538\,728\,089\,307\,602\,738\,842\,546\,422\,262\,341\,156\,400\,265\,669\,733\,000\,953$  y nos preguntan cuáles son los dos números primos que multiplicados entre sí nos dan  $N$  como resultado. ¿Cómo se resolvería el problema? El primer método sería el de fuerza bruta, probando con todos los números para ver cuál divide. En este caso, tendríamos que probar para todos los números  $k$  menores a  $N$ , dividiendo  $N/k$  y viendo el resultado. Si obtenemos un residuo de cero, hemos encontrado el número. Tendríamos entonces que ejecutar  $N$  divisiones y analizar los resultados, son muchísimas divisiones. Para darse una idea, son 99 dígitos, i.e. en el orden de  $10^{99}$ . Una computadora en general tiene un reloj en el orden de GHz, lo que implica un orden de  $10^9$  operaciones por segundo. Con esta velocidad, nos tomaría alrededor de  $10^{90}$  segundos probar con cada número. Para poner esto en perspectiva, hay 31 536 000 segundos en un año, por lo que nos tomaría todavía alrededor de  $10^{82}$  años probar para cada número, eso es muchísimas veces más que la edad del universo mismo. En otras palabras, es un sistema de encriptación muy seguro. Claro que este es solo el método de fuerza bruta, con un poco de conocimiento de teoría de números se puede demostrar que no es necesario probar todos los números, sino todos los números menores a la raíz del número. Esto reduciría la potencia de 10 a la mitad, i.e. de  $10^{99}$  bajaría a  $10^{49}$ , pero sigue siendo un número enorme. Podríamos tener la suerte de encontrarlo rápido, pero en promedio nos tardaría un tiempo proporcional a  $\sqrt{N}$ . Tal vez con mucha suerte logremos descubrir que los primos  $q$  y  $p$  que multiplicados nos dan  $N$  son  $p = 60\,492\,289\,314\,682\,881\,742\,522\,457\,068\,225\,008\,857\,962\,032\,666\,479$  y  $q = 60\,492\,289\,314\,682\,881\,742\,522\,457\,068\,225\,008\,857\,962\,032\,666\,479$  (puedes probar que en efecto, la multiplicación de estos números da como resultado  $N$ ). No es coincidencia que este método de encriptación sea el que predomine en el mundo digital el día de hoy, pero con todo esto, la QFT amenaza la seguridad de este sistema. Se pueden analizar patrones en los números primos, algo equivalente a un **análisis de frecuencias** como el que hicimos con señales, pero con números enteros, que reduzca el problema de encontrar un primo probando con todos los valores a una operación mucho más simple y que consume mucho menos tiempo. La QFT nos permite hacer precisamente este análisis, rompiendo la seguridad de la encriptación por descomposición de primos al brindarnos una alternativa exponencialmente más rápida para encontrarlos que la que se tenía con las computadoras tradicionales.

Aquí podrías retirarte y decir que aprendiste algo nuevo, pero si de verdad es de tu interés entender cómo funciona la QFT y por qué sirve para descomponer primos, te invito a acompañarme en este viaje que estamos a punto de emprender desde cero para entender la QFT. Pasaremos por geometría, vectores, la Transformada de Fourier Clásica, y muchos otros temas. Es posible que conozcas algunos de estos temas ya y te los quieras brincar para irte a lo más interesante, y eres completamente libre de hacerlo. Pero ten en mente que si en algún punto te

<sup>1</sup>Dos números se dicen coprimos si su máximo común divisor es 1, también llamados primos relativos [1]

sientes perdido, siempre puedes regresar para asegurarte que todo quede claro. No es posible construir una casa sobre cimientos flojos, por lo que vale la pena tener bien reforzadas las bases, por más simples que parezcan. Sin más preámbulos, vamos allá.

# Capítulo 1

## Geometría

### 1.1. Vectores Geométricos: Interpretación Polar

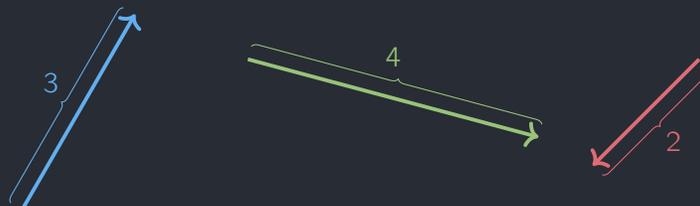
Un vector es un "término algebraico, una cantidad representada por una flecha que posee dirección y magnitud". [2] La flecha nos indica su dirección, mientras que el tamaño de ésta nos indica su magnitud. Por ejemplo, podemos tener los siguientes vectores:



En algunas ocasiones se habla también de que los vectores tienen sentido, como en el siguiente caso:

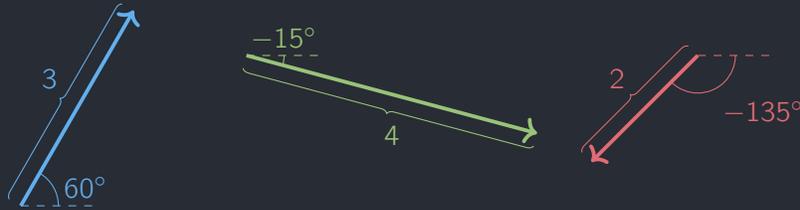


Se dice que los vectores tienen la misma dirección, pero diferente sentido, la dirección refiriéndose a la orientación más bien de la línea (sin flecha) y el sentido refiriéndose a la punta de la línea en la que colocamos la flecha. Esto es útil en ciertos contextos, y definitivamente sirve saberlo por si alguna vez se llega a leer, pero por el momento lo dejaremos fuera de la conversación. Pues bien, tenemos nuestra flecha y la podemos dibujar y ver en el espacio, pero ¿cómo la podemos describir? Recordemos la definición: un vector tiene **dirección** y **magnitud**. La magnitud se puede medir con la longitud de la flecha. Basta con colocar una "regla" y medir de punta a punta la distancia:

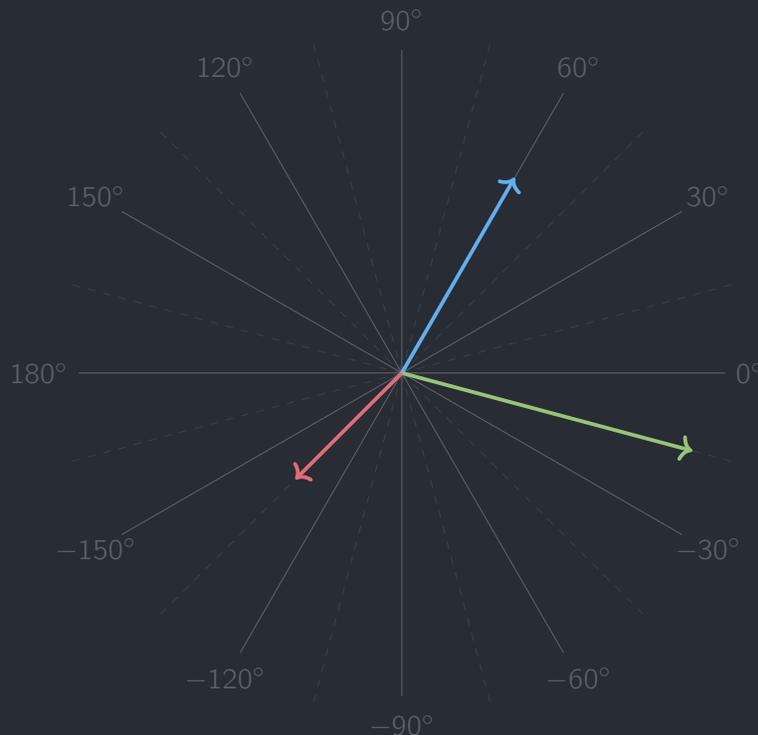


Ya tenemos una parte, ahora falta la dirección. Para conseguir la intuición de esto fijémonos en cómo se dan indicaciones para llegar a un lugar. Existen los puntos cardinales: norte, sur, este y oeste; que nos pueden ayudar

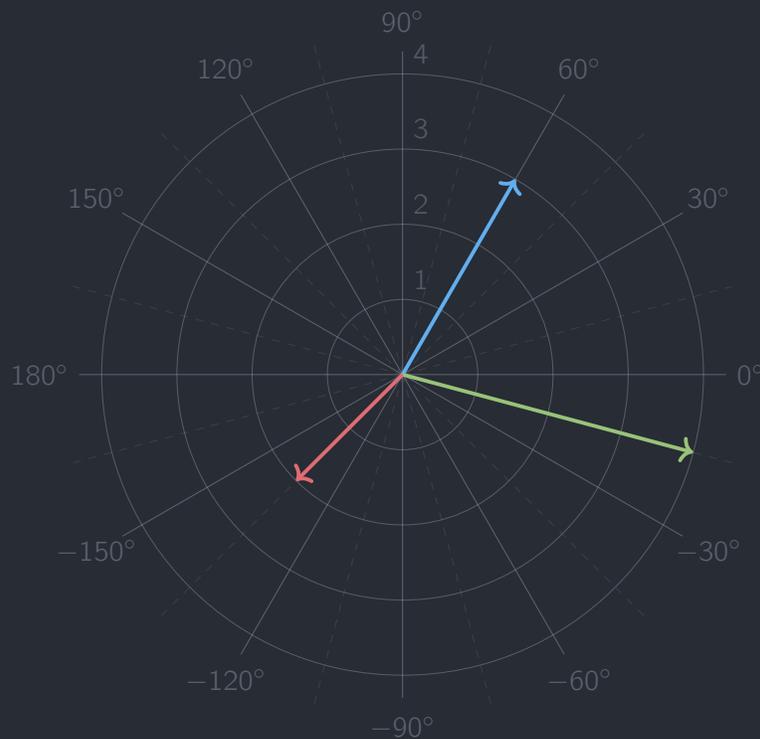
a describir una dirección. Pero están limitados, por lo que se le suele agregar puntos medios: noreste, sureste, suroeste y noroeste; con los que se pueden describir todavía más orientaciones. En general podemos indicar una orientación como una inclinación, y esto es justamente lo que hacen los ángulos. Un ángulo solo se puede dar entre dos rectas, por lo que necesitamos un eje de referencia, que será la horizontal, y a partir de ahí contamos los ángulos en sentido contrario a las manecillas del reloj (positivo) o en sentido de las manecillas (negativo). Tenemos entonces:



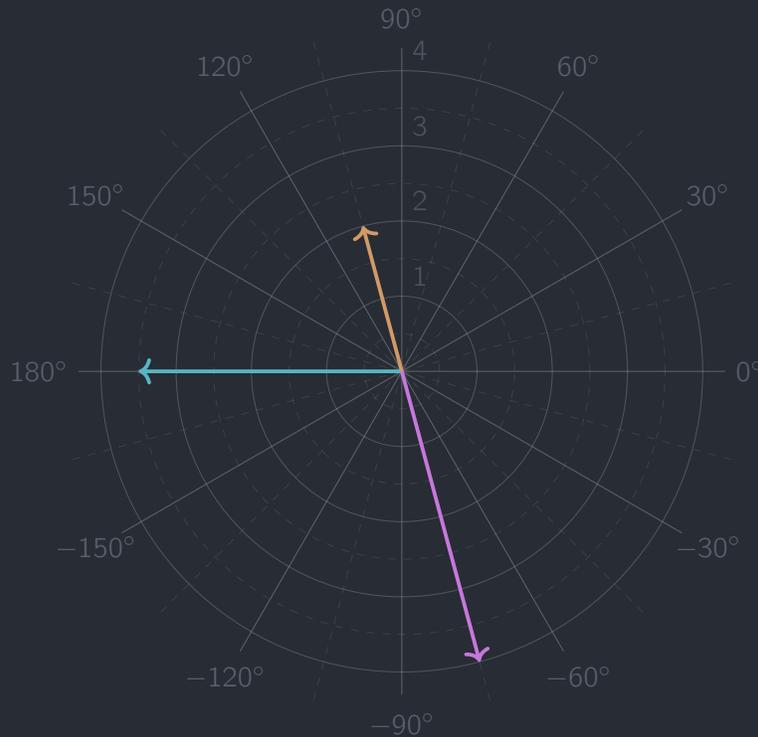
Con esto describimos completamente cada vector, con un número que indica su magnitud y otro que indica el ángulo de orientación. El ángulo puede ser negativo, indicando el sentido en el que se debe girar el vector, pero la magnitud siempre será positiva, pues representa una medición de distancia, y no tiene sentido hablar de un tamaño negativo. Cuando hablamos de vectores, no importa dónde estén físicamente, lo único que importa es donde empiezan y donde terminan. Por esta razón, si dos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección, son iguales, sin importar que estén dibujados en distintas partes. Ahora, es conveniente tener un sistema donde podamos medir los vectores, de igual manera que utilizamos una regla para medir la longitud de una línea. Necesitamos una "regla" que pueda medir un vector, y para esto necesitamos medir tanto su magnitud como su dirección. Imaginemos por un momento el proceso de medir la longitud de una línea. Primero, tenemos que alinear la regla con la línea, i.e. la regla debe tener la misma inclinación que el vector. Por lo que viene a la mente un transportador para medir grados, con el que ajustemos la regla. Creamos entonces líneas guía para ciertos ángulos, en este caso múltiplos de  $30^\circ$  y de  $15^\circ$  (más ténues), con los ángulos de arriba positivos y los de abajo negativos:



Entonces tenemos una métrica para saber el ángulo de inclinación para cada vector. Con esto podemos ver fácilmente que el vector azul tiene un ángulo de  $60^\circ$ , el verde un ángulo de  $-15^\circ$  y el rojo de  $-135^\circ$ . Para medir la longitud podríamos graduar cada línea, pero es más fácil trazar círculos de un mismo radio, así sabremos la magnitud del vector dependiendo de en qué círculo cae su punta. Podemos trazar círculos de magnitudes enteras, i.e. 1, 2, 3, etc.:



Como el vector azul toca la tercera línea, tiene magnitud 3, de igual manera el vector verde tiene magnitud 4 y el vector rojo magnitud 2. Con esto tenemos nuestro sistema de medición para un vector. Como ejercicio para el lector, determinar las magnitudes y direcciones de los siguientes vectores:



Una forma compacta de describir estos vectores es con la notación de magnitud ángulo. Por ejemplo:

$$3\angle 60^\circ \quad 4\angle -15^\circ \quad 2\angle -135^\circ$$

Con esto podemos describir enteramente un vector. Ahora nos falta solamente una notación para darle un nombre a cada uno y así poder identificarlos. Los vectores se pueden describir con letras, como lo hacemos con las variables numéricas, y por lo general se utiliza la letra "v" (de vector), pero escrita como  $\mathbf{v}$  o  $\vec{v}$ , para distinguirlo de las variables numéricas (escalares). En este libro se utilizará la notación de negritas, por fines estéticos. Entonces podemos describir nuestros tres vectores anteriores y nombrarlos como

$$\mathbf{v}_1 = 3\angle 60^\circ \quad \mathbf{v}_2 = 4\angle -15^\circ \quad \mathbf{v}_3 = 2\angle -135^\circ$$

Y así es como, de manera natural, llegamos a lo que se conoce como **coordenadas polares**. Un punto en este sistema de coordenadas está dado como un par ordenado  $(\rho, \theta)$ , donde  $\rho$  (rho) es el radio del círculo (y por tanto la magnitud del vector) y  $\theta$  es el ángulo azimutal, i.e. partiendo de la horizontal en dirección contraria a las manecillas del reloj (o en dirección de las manecillas, en caso de ser un ángulo negativo). Así, podemos escribir también los vectores como pares ordenados (coordenadas) en este sistema:

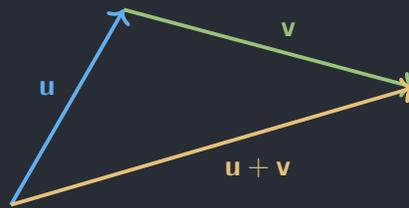
$$\mathbf{v}_1 = (3, 60^\circ) \quad \mathbf{v}_2 = (4, -15^\circ) \quad \mathbf{v}_3 = (2, -135^\circ)$$

Esta representación es bastante intuitiva y teniendo nuestras líneas guía sería muy fácil dibujar los vectores dado un par de coordenadas. Es importante notar que requerimos solamente de dos datos: la magnitud y la dirección. Al número mínimo de datos diferentes que necesitamos para describir un objeto se le conoce como **grados de libertad**. Podríamos también saber, como se mencionaba anteriormente, el sentido del vector. Pero esta información no es

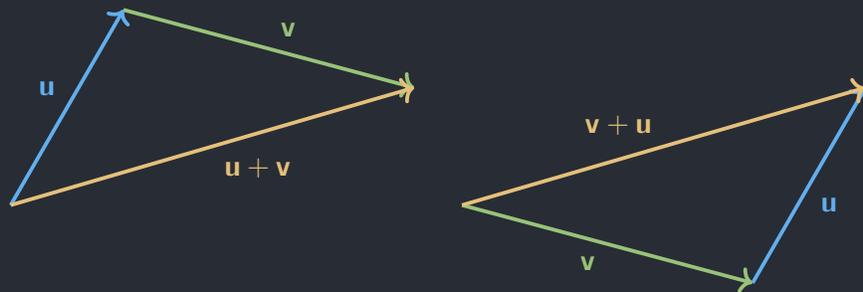
indispensable para describirlo. Es importante tener esto en cuenta al momento de describir vectores, pues toda la información adicional que proporcionemos está de más, y no es eficiente comunicarse de esta manera. Sin embargo, el que los vectores en 2 dimensiones tengan 2 grados de libertad no implica que tengamos que tener necesariamente la magnitud y la dirección de un vector para poder describirlo. Existe la posibilidad de describir al vector de otra forma, como veremos a continuación, y aprenderemos que es conveniente expresar objetos de diferentes formas según la situación en la que nos encontremos. Como introducción al siguiente capítulo, intenta idear una manera para sumar dos vectores utilizando la notación que hemos desarrollado hasta ahora (coordenadas polares). ¿Crees que haya otra interpretación de los vectores con la que sea más fácil de sumarlos?

## 1.2. Vectores Geométricos: Interpretación Cartesiana

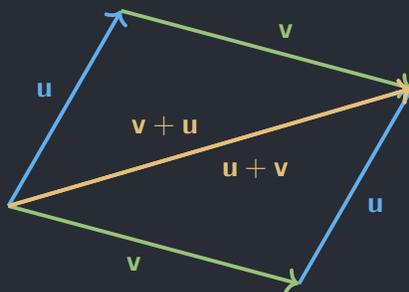
La suma de vectores se consigue poniendo la cola del segundo vector sobre la punta del primero y tomando ahora el trayecto desde la cola del primer vector hasta la cola del segundo. Visualmente sería:



Si entendemos cada vector como un **desplazamiento** o **trayectoria**, la suma de los vectores  $u$  y  $v$  es el desplazamiento resultante de recorrer la trayectoria de ambos vectores, uno tras otro. Podemos entender de esta manera los vectores como indicaciones de desplazamiento, donde la suma de éstos representa la ejecución de estas indicaciones en orden. Nótese que la suma de dos vectores nos da como resultado un nuevo vector. Ahora va la pregunta: ¿importa el orden en que sumemos los vectores?



De la ilustración parecen tener la misma longitud, y ésto lo podemos comprobar si empezamos del mismo punto ambas trayectorias:



Esto tiene una razón geométrica, pues al juntar de tal forma dos pares de vectores, obtenemos un paralelogramo. Debido a que tenemos el mismo vector dos veces, podemos afirmar que son paralelos, y además de misma longitud, por lo que cierran el paralelogramo y la suma de los vectores da como resultado la diagonal de dicha figura. Esto resulta de entender los vectores como trayectorias, y así se hace fácil sumarlos. Sin embargo, con nuestro sistema de coordenadas, no podemos sumar los vectores directamente. A partir de lo que tenemos, no hay forma de saber ni la magnitud ni el ángulo resultante. Debemos idear otra forma de entender los vectores que nos permita sumar trayectorias más fácilmente, y aquí es donde entra la interpretación **cartesiana**. En vez de entender un vector como una magnitud con dirección, podemos entenderlo como una serie de desplazamientos en direcciones conocidas. Lo más básico sería comenzar con la rosa de los vientos:



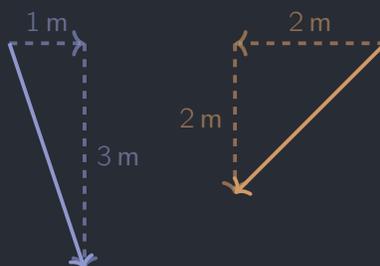
Podemos entonces definir vectores en términos de desplazamientos en estas cuatro direcciones. Por ejemplo, podemos definir un vector que resulte de desplazarse 3 m al este y 2 m al norte:



Entonces el vector se puede describir como 3 m al norte y 2 m al sur, o de igual manera 2 m al sur y 3 m al norte, ya que el orden en la suma no importa. Definiendo los vectores  $\mathbf{v}_E$  y  $\mathbf{v}_N$  como los vectores de magnitud 1 en dirección este y norte, respectivamente, tendríamos que:

$$\mathbf{v}_{ila} = 3\mathbf{v}_E + 2\mathbf{v}_N = 2\mathbf{v}_N + 3\mathbf{v}_E$$

A los vectores  $\mathbf{v}_N$  y  $\mathbf{v}_E$  se les llama **unitarios**, pues nos indican una dirección y tienen magnitud 1, para poder después escalarlos. De esta manera, podemos expresar las ideas de pasos al norte o al este de manera más compacta. En general, se toma la notación  $\hat{\mathbf{e}}_N$  y  $\hat{\mathbf{e}}_E$ , para dejar en claro que los vectores son unitarios, ya que un vector  $\mathbf{v}$  es arbitrario y puede tener cualquier magnitud. Podemos definir cualquier vector de esta manera, por poner otros ejemplos:



El vector magenta sería el resultado de caminar 1 metro al este y luego 3 metros hacia el sur; mientras que el naranja sería caminar dos metros al oeste y luego 2 metros hacia el sur. Nuevamente, definiendo los vectores  $\mathbf{v}_S$  y

$\mathbf{v}_O$  como direcciones sur y oeste, respectivamente:

$$\mathbf{v}_{\text{magenta}} = 1\hat{\mathbf{e}}_E + 3\hat{\mathbf{e}}_S \quad \mathbf{v}_{\text{naranja}} = 2\hat{\mathbf{e}}_O + 2\hat{\mathbf{e}}_S$$

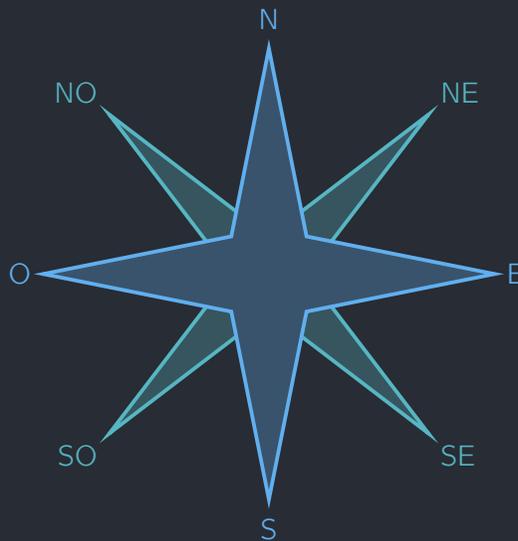
De esta forma, podemos definir cualquier vector en términos de sumas de vectores conocidos. Sin embargo, estas expresiones no son únicas. Podemos tomar también números negativos y optar por caminar dos metros negativos en dirección este, en vez de dos metros en dirección oeste, y así para cualquier par de direcciones con **sentido** opuesto:

$$\mathbf{v}_{\text{magenta}} = 1\hat{\mathbf{e}}_E + 3\hat{\mathbf{e}}_S = -1\hat{\mathbf{e}}_O + 3\hat{\mathbf{e}}_S = 1\hat{\mathbf{e}}_E - 3\hat{\mathbf{e}}_N = -1\hat{\mathbf{e}}_O - 3\hat{\mathbf{e}}_N$$

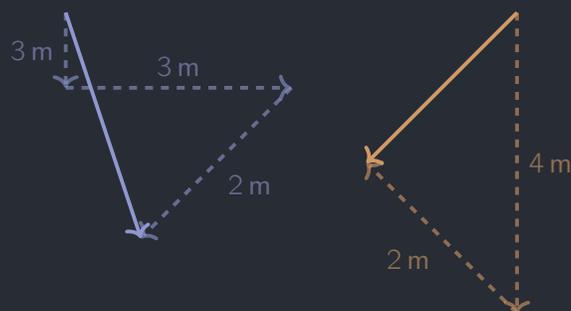
Y no solo esto, podemos tomar direcciones completamente diferentes que sumadas también nos den el mismo vector. Vayámonos a un ejemplo más simple, con números. Podemos expresar, por ejemplo, el número 10 en términos de la suma de diversos números:

$$10 = 8 + 2 = 1 + 9 = 5 + 5 = 4 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 = 5 + 4 + 1 = \dots$$

Y lo mismo ocurre con los vectores. En nuestro caso, podemos tomar más direcciones expandiendo la rosa de los vientos hacia las direcciones en medio de las originales, obteniendo el noreste, sureste, suroeste y noroeste:



Podríamos decir también que el vector naranja es el resultado de caminar en dirección **suroeste**. Y no debemos limitarnos a este vector, podríamos expresar los demás vectores en términos de estos nuevos suroeste, noreste, etc., pero no siempre es conveniente. Podríamos buscar todas las posibles combinaciones de direcciones que nos den como suma cualquiera de estos. Podríamos también ir primero al sur, luego al este, luego al suroeste para formar el vector magenta; o al sur y luego al noroeste para el vector naranja:



Y como vimos antes, esto se puede hacer de muchísimas formas distintas, pero como bien se dice "todo me es permitido, más no todo me conviene". Como lo vimos anteriormente, los vectores en dos dimensiones no tienen más que dos grados de libertad, por lo que es posible describirlos únicamente con dos datos. Entonces, deberíamos poder escoger dos direcciones cualquiera, y con ellas describir los vectores, por ejemplo norte y este, o noroeste y sur, o cualquier par... casi. ¿Qué pasa si intentamos describir el vector magenta utilizando únicamente las direcciones de oeste y este? Sin importar cuántos pasos demos en esas direcciones, nunca llegaríamos a nuestro destino. Esto es porque las direcciones son en realidad la misma, pero con diferente **sentido**. Si caminamos negativamente al este, sería como caminar en dirección del oeste. Entonces, no tendríamos dos datos diferentes, sino que son dos de lo mismo. Estamos yendo solo en una dirección realmente, por lo que no tenemos nada que nos lleve en el eje vertical, y por tanto no podemos expresar los vectores en términos de éstos. La condición es que sean dos direcciones diferentes. Por razones que serán evidentes más adelante, lo más conveniente es escoger las direcciones este y norte, o bien, horizontal y vertical. Podemos tomar estas direcciones como regla, de igual manera que armamos nuestra regla anteriormente con círculos concéntricos y diferentes ángulos, pero ahora marcando líneas de diferentes magnitudes de desplazamientos horizontales y verticales. Si dibujamos esto, tendremos líneas horizontales paralelas y líneas verticales paralelas que nos formará una cuadrícula a la que llamamos comúnmente **plano cartesiano**:



Aquí podemos colocar los vectores anteriores:



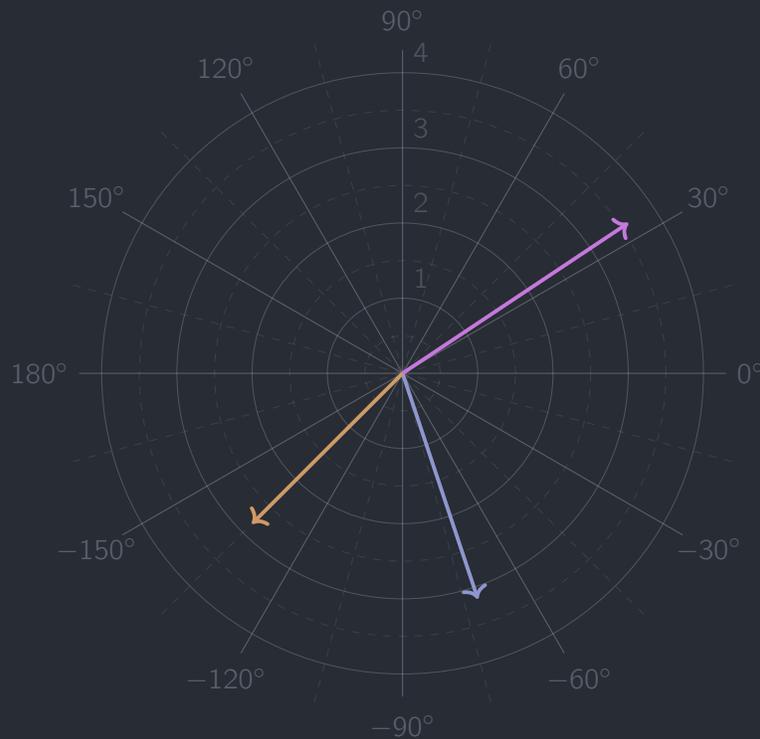
Podemos crear ahora una nueva notación, con vectores unitarios en dirección horizontal y vertical. Llamamos  $\hat{i}$  al vector unitario horizontal y  $\hat{j}$  al vector unitario vertical. Podemos entonces describir los tres vectores anteriores como una suma de estos vectores unitarios:

$$\mathbf{v}_{\text{magenta}} = 1\hat{i} - 3\hat{j} \quad \mathbf{v}_{\text{naranja}} = -2\hat{i} - 2\hat{j} \quad \mathbf{v}_{\text{lila}} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$$

Podemos expresar esto de manera aún más compacta, definiendo los vectores como lo hicimos con las coordenadas polares por medio de un par de coordenadas, en este caso las coordenadas serían el número de pasos horizontales y el de los verticales. Comúnmente llamamos al eje horizontal como el eje- $x$ , y al eje vertical como eje- $y$ . Así, damos  $x$  pasos en dirección horizontal, donde  $x$  positivo implica caminar hacia la derecha y  $x$  negativo hacia la izquierda; y  $y$  pasos en dirección vertical, donde  $y$  positivo implica caminar hacia arriba y  $y$  negativo hacia abajo. De esta manera podemos resumir los tres vectores anteriores como:

$$\mathbf{v}_{\text{magenta}} = \langle 1, -3 \rangle \quad \mathbf{v}_{\text{naranja}} = \langle -2, -2 \rangle \quad \mathbf{v}_{\text{lila}} = \langle 3, 2 \rangle$$

Si comparamos estas descripciones con las anteriores es más compacto, pero también se pierde más información, porque ya no está explícitamente escrito cuál es la **base** de nuestros vectores. No estamos seguros de que las coordenadas estén en el sistema cartesiano, o el polar, o cualquier otro. Por eso muchas veces es más útil expresarlo en términos de los vectores unitarios, que dejan claro en qué base estamos trabajando. Una base es un conjunto de vectores que sumamos entre sí, multiplicados por un escalar, para formar los vectores. Podemos cambiar de base para expresar el mismo vector en un sistema diferente de coordenadas. Por ejemplo, podemos tomar los vectores anteriores y meterlos en un plano polar:



Como podemos ver, no quedan tan bien ajustados, como sí lo hacían los vectores que creamos en base polar. De igual manera, los vectores que analizamos previamente de forma polar no encajarán tan bien en el plano cartesiano:



Pues como mencionábamos anteriormente, hay que escoger una base que nos convenga, dependiendo de la situación. Lo importante es tomar en cuenta la **invariancia** del vector, i.e. la flecha en sí no cambia. Sigue teniendo la misma magnitud y dirección, aunque la representemos en una base distinta. Esto implica la posibilidad de hacer un **cambio de base**. Podemos expresar un vector que está en coordenadas polares en términos de las coordenadas cartesianas. Para esto podemos fijarnos en la Figura A.1, donde podemos expresar los desplazamientos horizontales

y verticales en términos del ángulo. Dentro de este círculo unitario, las coordenadas  $x, y$  están dadas como:

$$(x, y) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

Si cambiamos el radio del círculo a  $\rho$ , tendríamos según (A.2.2a) y (A.2.2b):

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}$$

Despejando para  $x$  y  $y$  obtenemos la conversión general, para un radio arbitrario  $\rho$ :

$$x, y \mapsto \rho \cos \theta, \rho \sin \theta$$

Este radio indica la magnitud del vector, mientras que  $\theta$  nos indica la dirección. Con esto podemos convertir de polares a cartesianas, y esto nos motiva a buscar la conversión en el sentido contrario, de cartesianas a polares. Para esto nos fijamos en el triángulo y utilizamos el teorema de Pitágoras (A.1.1) para obtener  $\rho$ ; posteriormente con (A.2.2c) podemos obtener una expresión para  $\theta$ :

$$\rho, \theta \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

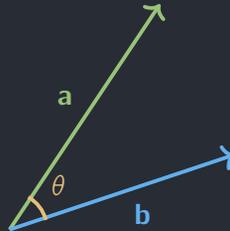
Donde  $\arctan$  es la función inversa de la tangente, que con el valor de la tangente nos regresa el ángulo  $\theta$ .

### 1.3. Producto Punto

Hablando de vectores es útil poder comparar diferentes vectores entre sí; de la misma manera que podemos comparar dos números para ver cuál es mayor o menor, o qué números comparten propiedades como la divisibilidad entre 2 o entre algún otro número. En el caso de los números podemos ver también qué tan parecidos son en escala, haciendo un análisis de porcentajes o una resta, lo cuál es útil para comparar cosas como calificaciones, estaturas, etc. En el caso de los vectores podemos también medir qué tan similares son entre sí, y para esto comparamos sus características, i.e. dirección y magnitud. Para comparar la dirección podemos ver la separación que hay entre ellos. Tomemos como ejemplo dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , con ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  respecto a la horizontal:



Si los ponemos ambos en el origen veremos que existe también un ángulo  $\theta$  entre ellos:



Este ángulo estará dado por la diferencia de éstos:

$$\theta = \alpha - \beta$$

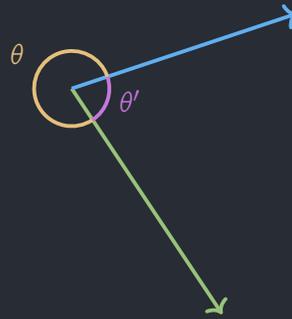
Si tuviéramos dos vectores idénticos, tendríamos  $\alpha = \beta$ , y con esto  $\theta = 0^\circ$ :



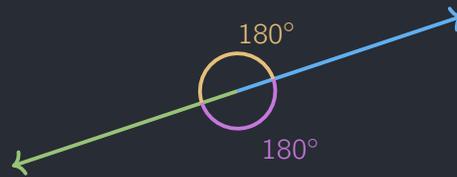
Dado que los vectores son iguales, este es el mayor grado de similitud posible. En otras palabras, si  $\theta = 0^\circ$ , los vectores son iguales en dirección. Entre menos se parezcan  $\alpha$  y  $\beta$ , mayor será la diferencia del ángulo, i.e.  $\theta$  será mayor. Dentro de una vuelta el mayor ángulo es  $360^\circ$ , pero esto es equivalente a  $0^\circ$ :



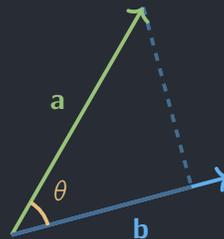
Ya que damos la vuelta completa y llegamos a donde mismo. Esto prueba un punto importante, pues si contamos el ángulo al revés, i.e. del vector  $\mathbf{a}$  al  $\mathbf{b}$  (en sentido opuesto del reloj), obtenemos nuevamente  $0^\circ$ . Esto prueba una regla general, de que no importa cuál ángulo tomemos, y por tanto conviene establecer una regla sobre cuál ángulo tomar, para tener una estandarización. Escogemos entonces el ángulo **menor** de los dos. Por ejemplo, si tenemos el siguiente caso:



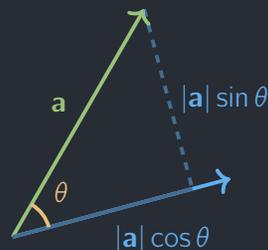
Tomaríamos el ángulo  $\theta'$ , pues es más pequeño que  $\theta$ . Pensando de esta forma, el ángulo más grande que podemos formar ya no es  $360^\circ$ , pues éste es equivalente a  $0^\circ$ ; más bien el ángulo mayor que podemos formar, y por tanto el que tendrá una similitud menor, será el de  $180^\circ$ , i.e. cuando los vectores van en direcciones opuestas:



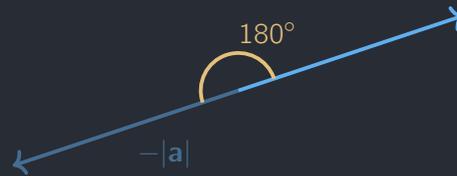
Otra manera de entender la similitud entre dos vectores es ver la **sombra** que deja el uno sobre el otro. Imaginemos que tenemos el sol justo arriba del vector **b**, proyectando una sombra del vector **a** sobre el vector **b**, de la siguiente manera:



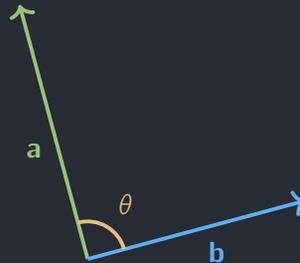
Podemos ver que se forma un triángulo con **a**, la sombra de **a** sobre **b** y la distancia perpendicular entre la punta de **a** y el vector **b**. Lo que es más, como la distancia es perpendicular, ya que la sombra está hecha de esta forma, tenemos un triángulo rectángulo, y podemos aplicar nuevamente lo visto en la Figura A.1:



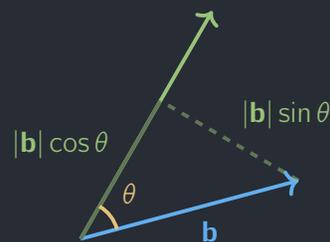
Aquí  $|\mathbf{a}|$  es la magnitud del vector **a**, i.e. el radio  $\rho$  del círculo formado por el vector **a**. Entonces la sombra mide  $|\mathbf{a}| \cos \theta$ . Veamos si tiene sentido. Si la sombra de **a** cubre totalmente a **b**, significa que ambos vectores son iguales, y por consiguiente  $\theta = 0^\circ$ , y comprobamos que  $\cos(0^\circ) = 1$ , entonces la sombra sería de longitud  $|\mathbf{a}|$ , lo cuál es correcto. Ahora, si el vector está en dirección contraria, el ángulo sería  $180^\circ$  con  $\cos(180^\circ) = -1$ , por lo que, según nuestra expresión, la sombra sería de longitud  $-|\mathbf{a}|$ . ¿Tiene sentido esto? Lo que estamos diciendo es que la sombra está fuera del vector:



Tenemos que la sombra es una reflexión total del vector. Por último, veamos que ocurre cuando los vectores son perpendiculares:



Ahora no tiene ninguna sombra. Esto también entra en nuestra expresión, ya que  $\theta = 90^\circ$  y  $\cos(90^\circ) = 0$ . ¿Qué significa esto? El coseno del ángulo entre los vectores da como resultado 0, y no se produce ninguna sombra. La diferencia de este caso y en el que los vectores van en direcciones opuestas es un tanto sutil. La diferencia sería que si tomamos nuestra sombra como un vector, en el caso de que  $\theta > 90^\circ$  la sombra apuntaría hacia el lado contrario de nuestro vector original. Además, si consideramos el valor absoluto de este indicador de similitud, obtenemos que los vectores perpendiculares son los que menos tendrían grado de similitud. Sin embargo, nuestro indicador aún no está completo. ¿Qué pasa si analizamos la sombra del vector **b** sobre el vector **a**?:



No es realmente la misma sombra que antes. En este caso, la sombra tiene menor longitud, lo que implicaría que la similitud de **a** con **b** no es la misma que la de **b** con **a**. Para solucionar este problema definimos el producto punto:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (1.3.1)$$

De esta forma hacemos que sea conmutativo y describa mejor la proyección. Una propiedad interesante es el producto punto de un vector consigo mismo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(0^\circ) = |\mathbf{a}|^2 \quad (1.3.2)$$

Hay otras propiedades interesantes, como la linealidad:

$$\alpha \mathbf{a} \cdot \beta \mathbf{b} = \alpha |\mathbf{a}| \beta |\mathbf{b}| \cos \theta = \alpha \beta |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \alpha \beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Ahora volvamos a la interpretación cartesiana. Tenemos los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  como:

$$\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}}$$

Si hacemos el producto punto de ambos obtenemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}}) \cdot (b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}})$$

Distribuimos y obtenemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1\hat{\mathbf{i}} \cdot b_1\hat{\mathbf{i}} + a_1\hat{\mathbf{i}} \cdot b_2\hat{\mathbf{j}} + a_2\hat{\mathbf{j}} \cdot b_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} \cdot b_2\hat{\mathbf{j}}$$

Por linealidad:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_1b_2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + a_2b_1\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + a_2b_2\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

Por (1.3.2) tenemos que  $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1^2 = 1$ , ya que ambos son unitarios. Lo que es más,  $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$ , ya que son perpendiculares:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1(1) + a_1b_2(0) + a_2b_1(0) + a_2b_2(1)$$

Simplificando:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = \sum_{i=1}^2 a_i b_i \quad (1.3.3)$$

Para un vector en 2 dimensiones. Es decir, sumamos la multiplicación de cada una de las componentes, en este caso las componentes 1 y 2, horizontal y vertical respectivamente. En este caso, no necesitamos saber ni la magnitud ni el ángulo entre los vectores. Pero ambas ecuaciones se cumplen, y podemos juntarlas como

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2$$

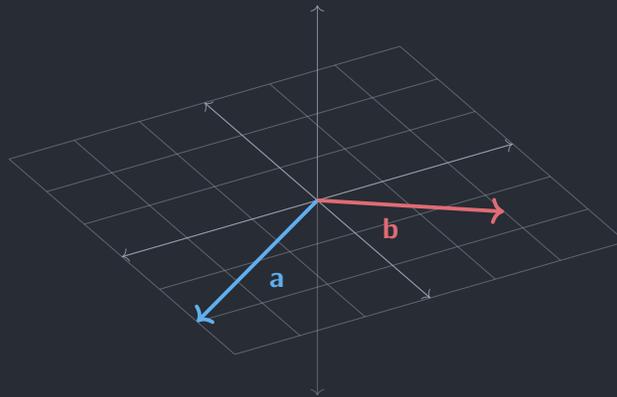
Ambas expresiones son equivalentes y nos sirven para comparar vectores en términos de su similitud. Si quisiéramos ver el tamaño de la sombra del vector  $\mathbf{a}$  sobre el  $\mathbf{b}$ , utilizaríamos  $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ , donde  $\hat{\mathbf{b}}$  es el vector unitario en dirección  $\mathbf{b}$ , de manera que:

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \hat{\mathbf{b}}$$

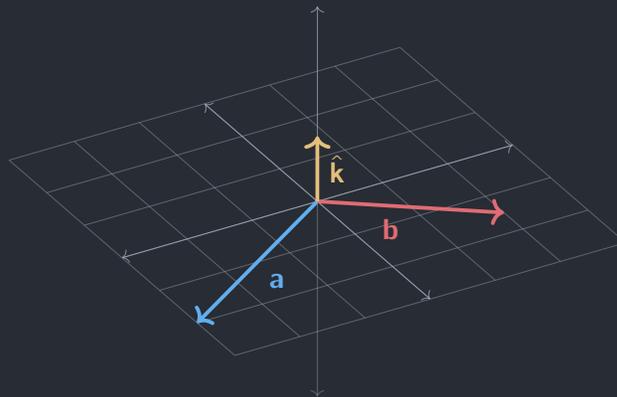
Otra manera de entender la sombra es como una **proyección** de un vector sobre otro, contestando la pregunta: ¿qué tanto del vector  $\mathbf{a}$  está sobre el vector  $\mathbf{b}$ ? Y esto nos lleva de nuevo al principio de todo.

## 1.4. Ortogonalidad y dimensiones superiores

Miremos ahora esto desde una perspectiva tridimensional:



Tenemos los mismos vectores, pero ahora en un espacio tridimensional. Al entrar en tres dimensiones, introducimos el vector unitario en dirección del eje  $z$ , al que llamamos  $\hat{\mathbf{k}}$ .



Los vectores ahora estarían representados como:

$$\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} \quad \mathbf{b} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

Dado que ambos están en el plano  $xy$  y no tienen ninguna componente vertical. Pero, ¿qué pasaría si agregamos una componente vertical  $b_3$  a  $\mathbf{b}$ , obteniendo un nuevo vector  $\mathbf{b}'$ ? El vector tendría una sombra en el plano  $xy$ , que sería equivalente al vector  $\mathbf{b}$ . Ahora pensemos en el producto punto entre los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}'$  con el vector  $\mathbf{a}$ . De acuerdo a (1.3.3):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1)(b_1) + (a_2)(b_2) + (0)(0) = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = (a_1)(b_1) + (a_2)(b_2) + (0)(b_3) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Entonces, ¡dan lo mismo!:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}'$$

Pero notemos que en ningún momento especificamos un valor para la componente en  $z$ , por lo que  $b_3$  podría tomar cualquier valor y no cambiaría en nada el resultado. Podemos agregar el número que sea a la componente en  $\hat{\mathbf{k}}$  y no cambiaría el producto punto:



van haciendo más grandes conforme crece  $b_3$ . Recordemos para el producto punto (1.3.1):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}'| \cos \theta'$$

La magnitud de  $\mathbf{a}$  se mantiene constante, pero la magnitud de  $\mathbf{b}'$  crece conforme crece  $b_3$ . Para ver cómo exactamente podemos regresar a la Figura 1.1, donde tenemos un triángulo rectángulo formado por  $\mathbf{b}$ , la distancia vertical  $b_3$  y  $\mathbf{b}'$ . Según Pitágoras, tenemos:

$$|\mathbf{b}'|^2 = |\mathbf{b}|^2 + b_3^2$$

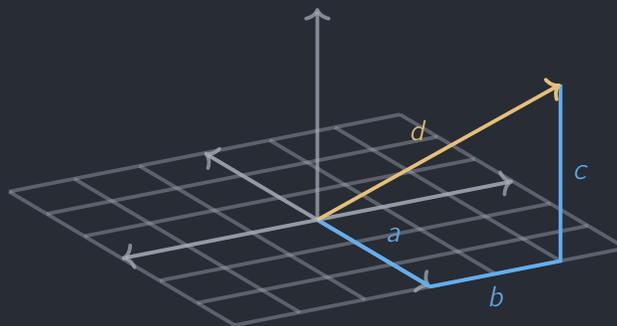
Podemos obtener la magnitud de  $\mathbf{b}$  también a su vez con Pitágoras:

$$|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

Y regresando a la expresión anterior:

$$|\mathbf{b}'|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

Tenemos un Teorema de Pitágoras en tres dimensiones, que se puede ver representado en la siguiente figura:



Donde se cumple que

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Entonces, volviendo al producto punto, tenemos que:

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}'| \cos \theta'$$

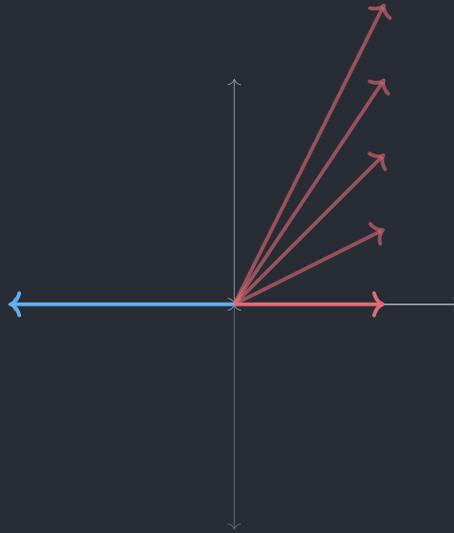
Como la magnitud de  $\mathbf{a}$  no cambia, podemos cancelarla al estar en ambos lados:

$$|\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}'| \cos \theta'$$

Sustituyendo las magnitudes:

$$\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos \theta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cos \theta'$$

Por lo que claramente  $\theta' \neq \theta$ , el ángulo sí cambia. Este cambio se puede apreciar todavía mejor si lo vemos desde el nivel del plano:



El ángulo se va cerrando cada vez más, esto para compensar el crecimiento de la magnitud. El coseno de  $\theta'$  deberá ser menor de manera que se siga manteniendo la igualdad del producto punto a pesar de que el vector siga creciendo en magnitud. Lo importante de aquí es que con tener la pura proyección del vector tridimensional  $\mathbf{b}'$  sobre el plano bidimensional en el que se encuentra el vector  $\mathbf{a}$ , podemos obtener su producto punto, sin necesidad de considerar la componente vertical en  $\hat{\mathbf{k}}$ . Suponiendo que agregáramos otra dimensión, por ejemplo  $\hat{\mathbf{i}}$  con una componente  $b_4$ , el producto punto seguiría sin cambiar:

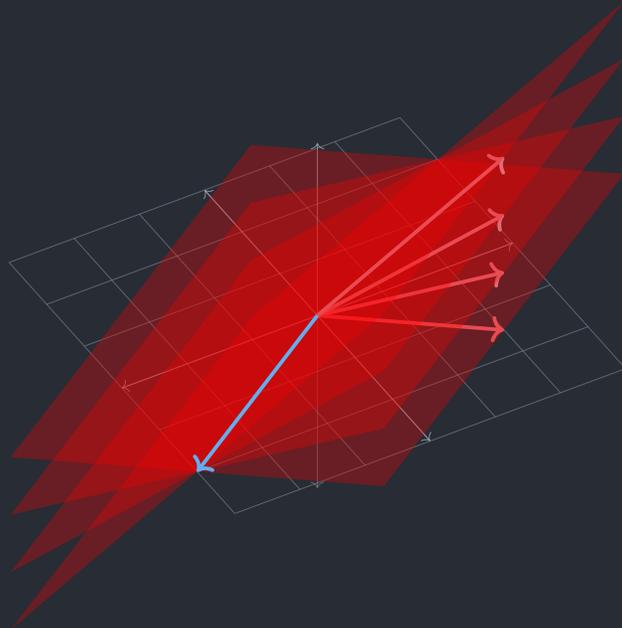
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = (a_1)(b_1) + (a_2)(b_2) + (0)(b_3) + (0)(b_4) = a_1b_1 + a_2b_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Volvemos nuevamente a la proyección del vector  $\mathbf{b}'$  sobre el plano en el que se encuentra  $\mathbf{a}$ . Y así sucederá si agregamos más dimensiones, no cambiará el producto punto, porque el vector  $\mathbf{a}$  tiene componentes 0 en todas las demás dimensiones. Pero, ¿a qué se debe esto? Esta propiedad se conoce como **ortogonalidad**, y es similar al concepto de perpendicularidad. Se dice que dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales,  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  si su producto punto es cero:

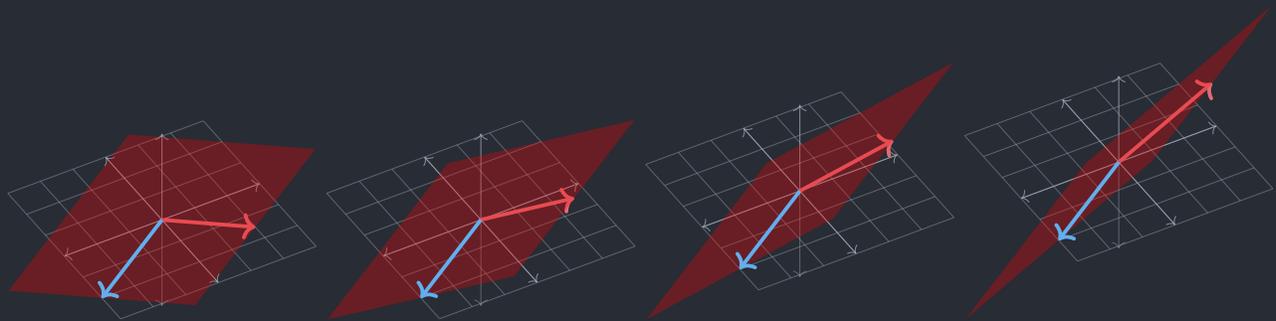
$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

## 1.5. Planos

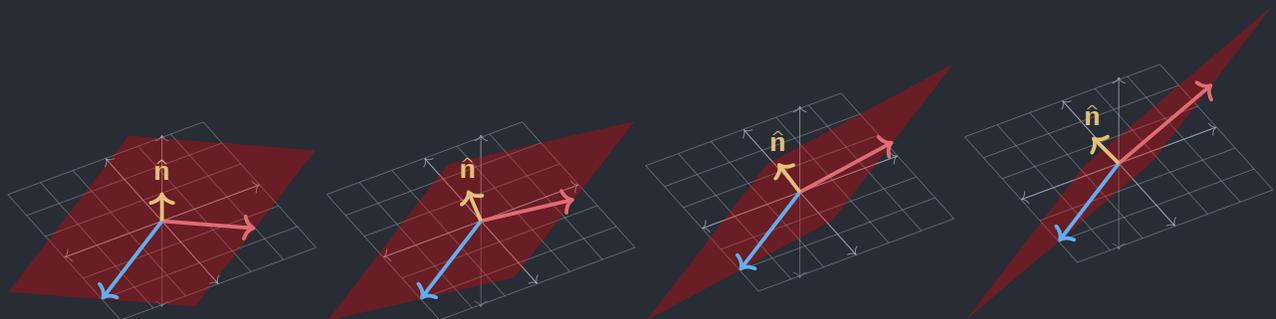
Esta propiedad es muy útil, pero requiere de una condición especial: que encontremos la proyección de  $\mathbf{b}'$  sobre el plano en el que está el vector  $\mathbf{a}$ , y el problema es que cualquiera de los demás vectores podría formar un plano con  $\mathbf{a}$  también.



Podemos verlos mejor también por separado:



Todos estos planos son válidos, pero en este caso los vectores para los que se cumple la propiedad mencionada no son los que tienen una componente en  $\hat{\mathbf{k}}$  diferente, pues  $\hat{\mathbf{k}}$  ya no es ortogonal al plano. Tenemos que encontrar un vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  normal al plano:



Lo interesante es que ahora sí podemos describir los planos en términos de un vector, el vector **normal** (ortogonal) al plano. El vector  $\hat{\mathbf{n}}$  será ortogonal a cualquier vector en el plano, en este caso sería ortogonal tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ , y además pedimos que tenga magnitud 1. Esto se vería de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad |\hat{\mathbf{n}}| = 1$$

Tenemos tres incógnitas para nuestro vector normal, en tres dimensiones:

$$\hat{\mathbf{n}} = n_1 \hat{\mathbf{i}} + n_2 \hat{\mathbf{j}} + n_3 \hat{\mathbf{k}}$$

Resolviendo estas tres ecuaciones podríamos llegar al resultado. Lo importante de los planos es notar que los cálculos son mucho más simples si alineamos nuestro plano al sistema de referencia, en este caso  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ . Lamentablemente, esto no siempre pasa, como se puede ver en las ilustraciones, el plano rojo se desalinea del plano base  $xy$ , y los cálculos ya no son tan fáciles. La buena noticia es que podemos mover nuestro sistema de referencia, para tener un nuevo sistema en el plano  $x'y'$  que esté alineado al plano entre los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}'$ . Sin embargo, resolver el sistema de ecuaciones puede ser muy laborioso, podemos idear un método más sencillo.

## 1.6. Producto Cruz

Así como armamos el producto punto, de manera que  $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1$  pero  $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$ , i.e. los vectores ortonormales tienen un producto interno de 0 mientras que los vectores unitarios iguales tienen un producto interno de 1. Podemos definir un producto **cruc** que nos genere un vector que sea ortogonal a ambos vectores. En dos dimensiones no es posible, pero a partir de 3 sí. Tendríamos por ejemplo que:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$$

Pues el vector  $\hat{\mathbf{k}}$  está en otra dimensión que es ortogonal a ambos vectores al ser también ortogonal al plano. Notemos como cuando queríamos un vector normal al plano  $xy$  el resultado natural era el vector  $\hat{\mathbf{k}}$ , pues es ortonormal al plano. En otras palabras, nuestro producto cruz  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  nos dará un vector normal al plano formado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Pero aquí viene un pequeño problema, dado que el vector  $-\mathbf{w}$  es también ortogonal al plano. Se toma la convención de que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ , para poder considerar ambas opciones y darle un sentido al producto. De esta manera podemos obtener las demás relaciones entre los vectores unitarios:

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Además, los vectores paralelos tendrían un producto cruz de cero, pues no forman un plano y no existe un solo vector que sea perpendicular:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

De esta manera podemos obtener el producto cruz de dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  expresados en términos de los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1 \hat{\mathbf{i}} + u_2 \hat{\mathbf{j}} + u_3 \hat{\mathbf{k}}) \times (v_1 \hat{\mathbf{i}} + v_2 \hat{\mathbf{j}} + v_3 \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \cancel{u_1 v_1 \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}}^0 + \cancel{u_1 v_2 \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}}^{\hat{\mathbf{k}}} + \cancel{u_1 v_3 \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}}^{-\hat{\mathbf{j}}} \\ &\quad + \cancel{u_2 v_1 \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}}^{-\hat{\mathbf{k}}} + \cancel{u_2 v_2 \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}}^0 + \cancel{u_2 v_3 \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}}^{\hat{\mathbf{i}}} \\ &\quad + \cancel{u_3 v_1 \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}}^{\hat{\mathbf{j}}} + \cancel{u_3 v_2 \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}}^{-\hat{\mathbf{i}}} + \cancel{u_3 v_3 \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}}^0 \\ &= u_1 v_2 \hat{\mathbf{k}} - u_1 v_3 \hat{\mathbf{j}} - u_2 v_1 \hat{\mathbf{k}} + u_2 v_3 \hat{\mathbf{i}} + u_3 v_1 \hat{\mathbf{j}} - u_3 v_2 \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Factorizando llegamos a:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{\mathbf{i}} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{\mathbf{j}} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{k}} \quad (1.6.1)$$

En el ejemplo anterior, podemos obtener el vector normal  $\mathbf{n}$  con ayuda de este nuevo producto:

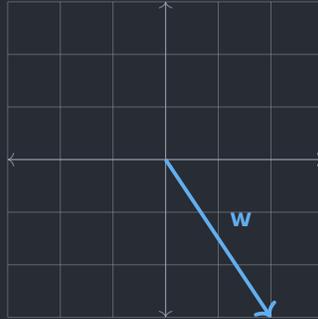
$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Y el unitario como:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

## 1.7. Cambio de base

Veamos ahora el verdadero poder del producto punto. Si tenemos un vector arbitrario  $\mathbf{w}$  en el plano:



Podemos ver el producto punto de  $\mathbf{w}$  con los vectores unitarios del plano  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$ :



Como podemos ver de la ilustración, podemos obtener las componentes del vector  $\mathbf{w} = w_1\hat{\mathbf{i}} + w_2\hat{\mathbf{j}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$  por medio del producto punto, según la ecuación (1.3.3):

$$\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{i}} = w_1 = 2 \quad \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{j}} = w_2 = -3$$

Esto nos lleva a un concepto más general de lo que es una **base**. El producto punto nos dice por qué tanto debemos escalar los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  para que sumados nos den  $\mathbf{w}$ . Esto debido a que los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$  son unitarios, pues recordemos que la proyección es el producto punto únicamente cuando el vector sobre el que proyectamos es unitario. Pero este no es el único requisito, pues otra característica que tienen estos vectores base es que son ortogonales:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0$$

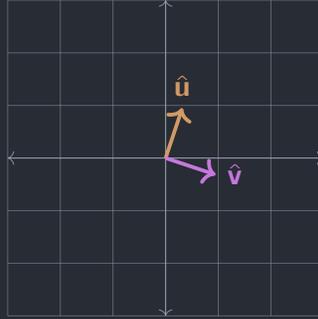
Esto se traduce también como que los vectores sean **linealmente independientes**, lo que quiere decir que no hay manera de que escalando uno de los vectores base nos de como resultado el segundo. En otras palabras, no existe ningún número  $k$  tal que  $k\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$ . Estos son los requisitos para una buena base, pero se pueden armar bases con vectores no ortogonales, siempre y cuando no sean **linealmente dependientes**, pues en ese caso no podríamos expandir todo el plano. A estas bases con vectores normales y ortogonales entre sí se les conoce como **bases ortonormales**, y son las únicas bases con las que trabajaremos para llegar a la Transformada Cuántica de Fourier. La manera más fácil de obtener un vector unitario es escoger un vector arbitrario y dividirlo por su magnitud:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

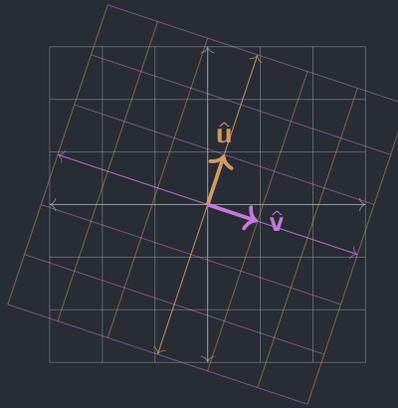


De aquí obtenemos la base ortonormal:

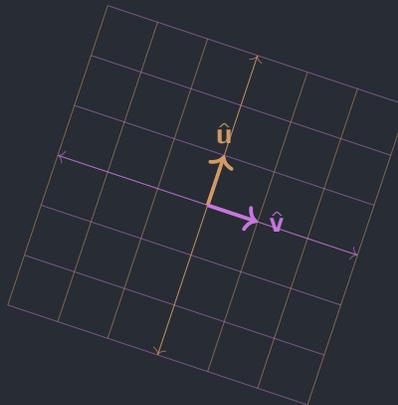
$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{j} \quad \hat{v} = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}$$



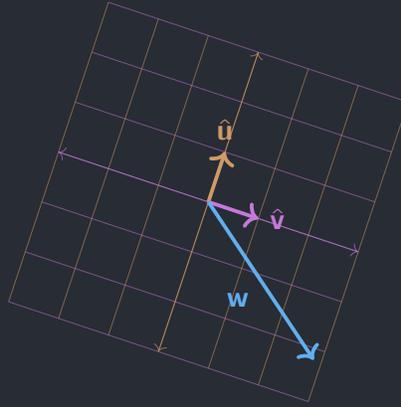
Es como una rotación de nuestro sistema original. Pero el plano todavía está en la orientación original, podemos corregir esto orientando la cuadrícula de acuerdo a los nuevos vectores base:



Y tenemos una nueva base rotada:



Podemos representar nuestro vector anterior en esta base también:

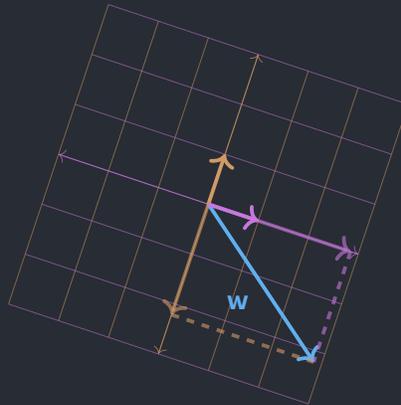


Para esto necesitamos el producto punto:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \right) (2) + \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right) (-3) = \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{9}{\sqrt{10}} = -\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right) (2) + \left( -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) (-3) = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

Y logramos la proyección:



Y así de fácil es construir una nueva base y representar vectores en términos de ésta. Podemos ahora expresar el vector  $\mathbf{w}$  como una suma de los vectores base  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{w} = -\frac{7}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{u}} + \frac{9}{\sqrt{10}}\hat{\mathbf{v}}$$

Con esto ya tenemos todas las herramientas para manipular vectores de cualquier dimensión utilizando una representación bidimensional.



## Capítulo 2

# Vectores Abstractos

### 2.1. El sistema decimal

Para introducir este tema vamos a participar en un pequeño experimento mental: intenta describir un número mayor a 9 utilizando un solo dígito. ¿Es posible? Bueno, existen los números hexadecimales, con los que podemos describir los números hasta el 15 en un solo "dígito". Pero con tan solo uno de los dígitos del sistema decimal, ¿podemos describir el número diez? ¿o el noventa? La respuesta es no, nuestro espacio de 1 dígito está limitado. Necesitaríamos un dígito adicional para describir un número mayor a 9, y con esto podríamos describir cualquier número del 0 al 99, un total de 100 números. Para escribir el número veintiuno colocamos el dígito 2 en las decenas y el 1 en las unidades, como un par ordenado: 21, que se lee como:

$$2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 21$$

Los dígitos por sí solos no nos dicen toda la información, necesitamos el contexto del valor de las decenas y unidades. Y de manera similar podemos formar las centenas, millares, etc., ascendiendo en potencias de 10. Por ejemplo, el número 42,069:

$$4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Utilizando este espacio de 5 dígitos podemos describir cualquier número de 5 dígitos o menos, como el 70:

$$0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

Podemos simplificar esta notación con una lista de los valores de cada potencia:

$$70 = \langle 0, 0, 0, 7, 0 \rangle$$

Así, el número en la lista se multiplica por su respectiva potencia de 10, comenzando por la potencia 0 de derecha a izquierda. A cada número en esta lista se le denomina **componente**. Y así es como, sin haber hablado aún de vectores desde su definición geométrica, hemos llegado a formar un **espacio vectorial**. Para construir un espacio vectorial necesitamos los llamados **vectores base**, que como su nombre sugieren, forman la base del espacio. A través de multiplicadores escalares, podemos sumarlos para obtener cualquier vector dentro de nuestro espacio. Pero, ¿qué es un vector? Se podría definir, general y abstractamente, como una lista de números que nos indican un

punto o coordenada en un espacio determinado. En nuestro caso ejemplo, tenemos como espacio los números de 5 o menos dígitos, y cada punto en este espacio representa un número. Bajo este concepto, el vector  $\langle 0, 0, 0, 7, 0 \rangle$  no contiene por sí mismo toda la información que necesaria para saber que estamos hablando del número setenta. Sin un espacio vectorial, ni un concepto de lo que representa un punto en este espacio, un vector no es más que una lista de números sin significado alguno. Esa lista bien podrían ser las calificaciones de un estudiante, o las respuestas de una encuesta, o una lista de asistencia a una clase de Física del Estado Sólido. Lo que es más, tomar un vector sin contexto nos puede llevar a conclusiones erróneas. Tomemos como ejemplo el número 11. Podríamos leerlo como once:

$$11 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

Si partimos de la premisa que estamos en sistema decimal. Pero bien podría tratarse del número tres, en el sistema binario:

$$(11)_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (3)_{10}$$

O como nueve, en el sistema octagonal, o diecisiete, en el sistema hexadecimal:

$$(11)_8 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 1 = (9)_{10} \quad (11)_{16} = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 1 = (17)_{10}$$

Por lo que un mismo vector, refiriéndonos a la lista de componentes, puede representar distintos puntos según definamos nuestro espacio vectorial y nuestros vectores base. De manera inversa, podemos representar el número once en las diferentes bases:

$$(11)_{10} = (B)_{16} = (13)_8 = (1011)_2$$

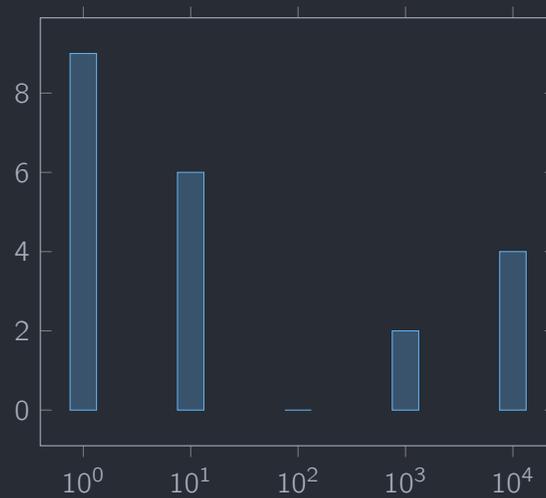
A esto se le conoce como **cambio de base**. En este caso cambiamos de base y de vector, pero el punto u objeto permanece constante. La idea del número "once" se puede representar de distintas formas en las diferentes bases, según se requiera. Introducimos los vectores desde esta perspectiva para abrir la mente a los espacios vectoriales **abstractos**. Comúnmente se trata a los vectores como flechas dentro de la física o la matemática, pero esa es solo una posible representación. Para poder entender realmente el concepto de la Transformada de Fourier Cuántica (QFT), es necesario entender este tipo de espacios abstractos, donde las dimensiones de los vectores pueden representar muchas cosas y no están cerradas a dimensiones espaciales y puntos en un plano. En fin, nos quedamos en que tenemos una base para los números de 5 dígitos en el sistema decimal, y esto lo podemos representar como:

$$\{10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0\}$$

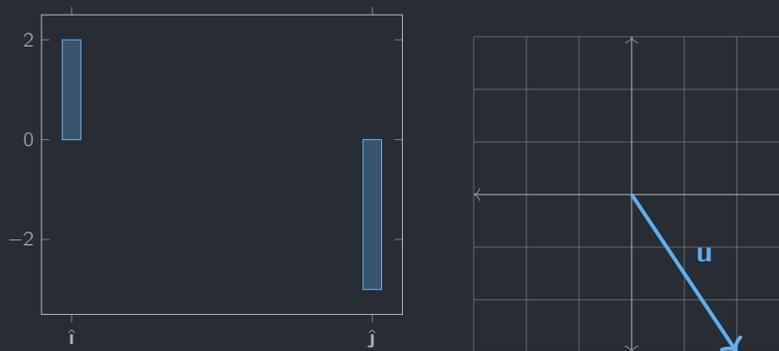
El decir que sirve como base para el espacio de los números de 5 dígitos implica que se puede obtener cualquier número de 5 dígitos a través de esta base, lo que la hace una base válida. Si, por ejemplo, quitáramos el  $10^1$ , no podríamos representar el número once, ni el doce, ni el cientodiez, y así para otros más números. Esto considerando que las componentes del vector solamente pueden ser dígitos del 0 al 9. Y aquí viene una pregunta: ¿será posible quitar un vector base y seguir pudiendo generar todos los números de 5 o menos dígitos?

La respuesta es que no, pues ya hemos visto anteriormente sobre el concepto de grados de libertad y de la posibilidad de generar todo el espacio. Nuevamente, se repiten los conceptos vistos en la interpretación geométrica de los vectores, pero ya no estamos trabajando necesariamente con flechas ni planos. Aún así, existen maneras

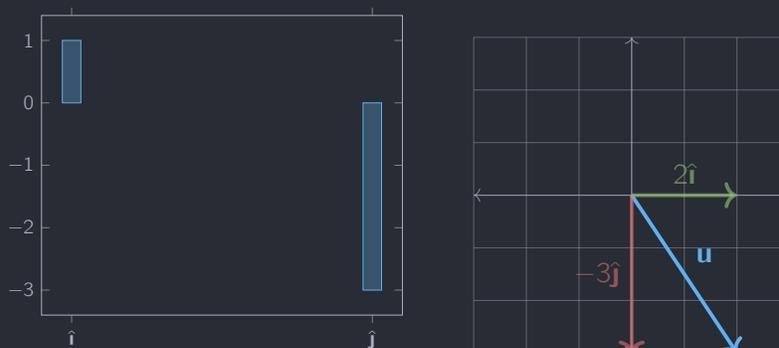
de representar visualmente espacios vectoriales de dimensiones mayores. Una de ellas es una gráfica de barras. Podemos poner en el eje de las  $x$  los vectores unitarios/base y dependiendo de la altura en el eje  $y$  de la barra, es el coeficiente que tiene este vector y por tanto el vector resultante sería la suma de todos estos vectores base multiplicados por sus bases. Por ejemplo, el número 42 069 en la base de 5 dígitos decimales:



Y podemos regresar esto también a los vectores en dos dimensiones, por ejemplo  $\mathbf{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ :



En este caso podemos ver ambas representaciones lado a lado. En la izquierda vemos los componentes de cada una, mientras que a la derecha vemos la flecha directamente. Podríamos también en la representación cartesiana resaltar los componentes:

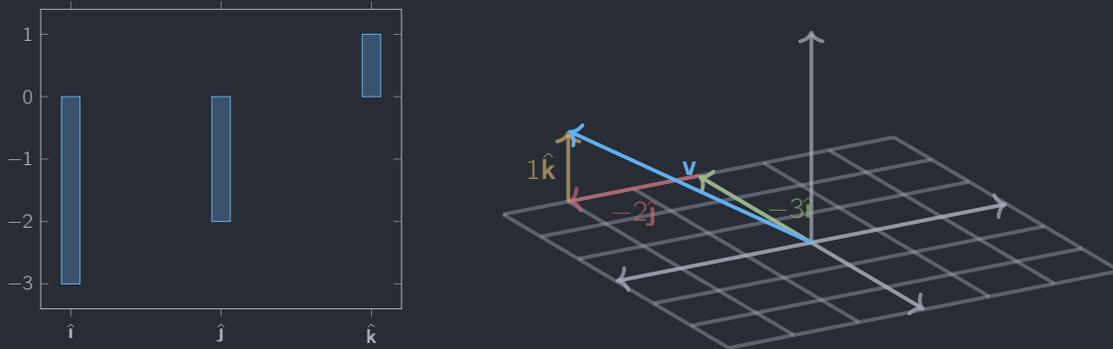


Tengamos en cuenta que ambas expresiones son equivalentes y representan el mismo vector. En el caso de la representación de la izquierda, tiene la utilidad de que es muy fácil agregar más dimensiones, y no solo eso, sino

que las componentes son fáciles de obtener. Con esto también podemos obtener los productos punto del vector con los vectores base unitarios:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 2 \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -3$$

Estos componentes reflejan directamente los productos punto, y esto es válido para cualquier número de dimensiones. Por ejemplo, para el vector tridimensional  $\mathbf{v} = -3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}}$ :



Aquí también se cumple lo mismo del producto punto con los vectores base:

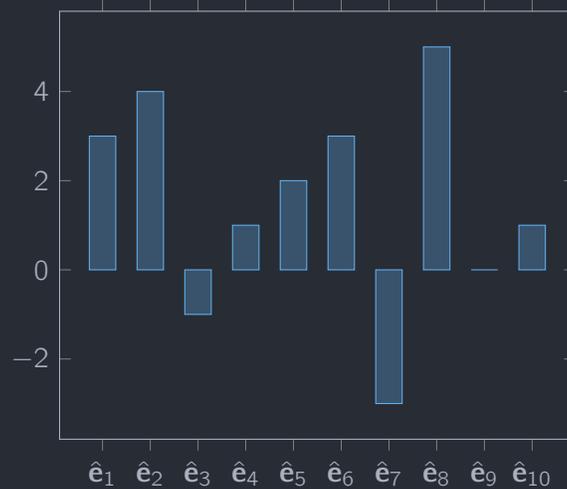
$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{i}} = -3 \quad \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -2 \quad \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

La ventaja de esta representación es que ya no podemos representar una flecha de cuatro dimensiones. En sí, este documento es un espacio bidimensional, ya sea que se vea plasmado en un papel o a través de una pantalla (también de 2 dimensiones), y propone solo una proyección de una imagen 3D en un espacio 2D, limitado ya que solo podemos ver la imagen en una orientación. La limitación es evidente para representar de esta forma imágenes de 4D, es prácticamente imposible. Pero con la representación de barras, no tenemos esta limitación, podemos hacerlo para dimensiones arbitrarias. Podemos tener un vector en un espacio de  $N$  dimensiones representado de esta forma, llegando incluso a dimensiones **infinitas**, que veremos más adelante.

Probablemente no es evidente aún, pero esta representación será muy útil para poder entender la Transformada de Fourier. Recordemos las gráficas de frecuencias/harmónicos que vimos en la Introducción. Esto es prácticamente lo mismo, al menos visualmente. La diferencia es que aquí estamos hablando de los vectores  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  y  $\hat{\mathbf{k}}$ , pero este no tiene que ser el caso. Podemos crear una abstracción que nos permita tener bases más generales, utilizando los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_n$  para representar el vector unitario de la  $n$ -sima dimensión. Por ejemplo, una representación del vector

$$\mathbf{w} = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 4\hat{\mathbf{e}}_2 - 1\hat{\mathbf{e}}_3 + 1\hat{\mathbf{e}}_4 + 2\hat{\mathbf{e}}_5 + 3\hat{\mathbf{e}}_6 - 3\hat{\mathbf{e}}_7 + 5\hat{\mathbf{e}}_8 + 0\hat{\mathbf{e}}_9 + 1\hat{\mathbf{e}}_{10}$$

en un espacio 10-dimensional se vería de la siguiente manera:



Aquí aplica lo mismo del producto punto:

$$\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 3, \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 4, \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = -1, \dots, \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{10} = 1$$

Además, como es una base ortonormal:

$$\hat{\mathbf{e}}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_m = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Es decir, tenemos  $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 1$  porque todos los vectores base son unitarios, pero tenemos  $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 0$  porque son ortogonales entre sí, i.e. una base ortonormal. Existe una función matemática que sirve para expresar este tipo de casos, a la que llamamos **Delta de Kronecker**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1.1)$$

De esta manera, podemos describir la ortonormalidad de los vectores base como

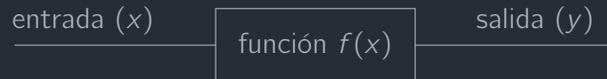
$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (2.1.2)$$

De esta manera podemos simplificar los productos punto de cualquier base de vectores ortonormales: producto punto de cualquier par de vectores diferentes será cero, mientras que el producto consigo mismo será uno. Además, podemos empezar a aprovechar las propiedades de los vectores abstractos. En el caso de 2 dimensiones, podemos decir que  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$ , mientras que en tres dimensiones agregamos  $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$ . Pero también podríamos decir para el sistema decimal  $\hat{\mathbf{e}}_1 = 10^0$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2 = 10^1$ , y así sucesivamente. Es decir, los vectores  $\hat{\mathbf{e}}_n$  no están restringidos a ninguna representación específica, y esto nos da la libertad de ponerle el nombre que queramos, incluso el de frecuencias armónicas. Ahora se hace mucho más fácil ver la similitud de este diagrama con el diagrama de frecuencias armónicas que vimos en la Introducción. Si decimos que  $\hat{\mathbf{e}}_n$  es la frecuencia equivalente al armónico  $n$  de alguna nota base, podría ser que nuestra gráfica represente una señal de audio vista en la Figura 0.1. Aquí podemos ver el poder de esta representación, pues seguimos teniendo la intuición de los vectores y podemos aplicar identidades geométricas que se heredan desde el espacio bidimensional, pero ya no nos restringimos a representar flechas o siquiera objetos geométricos, sino cualquier cosa.

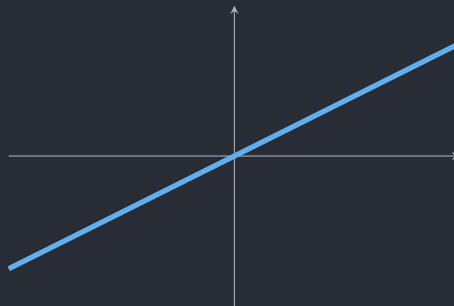


## 2.2. Funciones

Otro espacio abstracto se puede ver en las funciones. Una función es un objeto matemático que nos regresa un valor único para un valor de entrada dado. La representación más común de esto es el siguiente diagrama:



Tenemos de un lado la entrada  $x$ , pasamos por la caja que representa la función  $f(x)$  y del otro lado recibimos una única salida  $y$ . Un ejemplo de una función sería  $f(x) = x/2$ , de manera que  $f(1) = \frac{1}{2}$  y  $f(2) = 1$ , por poner unos ejemplos. Lo que hace que una función se puede interpretar como un vector es su **dominio**, i.e. para qué valores de  $x$  está definida o es válida. Podemos evaluar la función en diferentes puntos dentro de este dominio y siempre tendremos un resultado o salida asociado,  $y = f(x)$ . Esto hace que podamos ordenar pares de entradas-salidas  $(x, y)$ , y a partir de esto construir una representación gráfica de la función, donde iremos colocando cada punto con coordenadas  $(x, f(x))$  en el plano, para todos los posibles valores de  $x$ :



Y obtenemos una línea formada por todos los pares de puntos de la forma  $(x, f(x))$ , como  $(-2, 1)$  y  $(2, 1)$ . La conexión con vectores se hace más evidente si reducimos el dominio a solo unos cuantos números enteros, y así reducimos el espacio solo ciertos puntos  $x_n$ . Y esta vez, en vez de escoger un punto en el plano, haremos que los puntos  $x_n$  sean las categorías de una gráfica de barras, donde  $f(x_n)$  será la altura de cada barra. Si tomamos los números enteros del  $-3$  al  $3$ , i.e.  $x_1 = -3, x_2 = -2, \dots, x_7 = 3$ , tenemos:

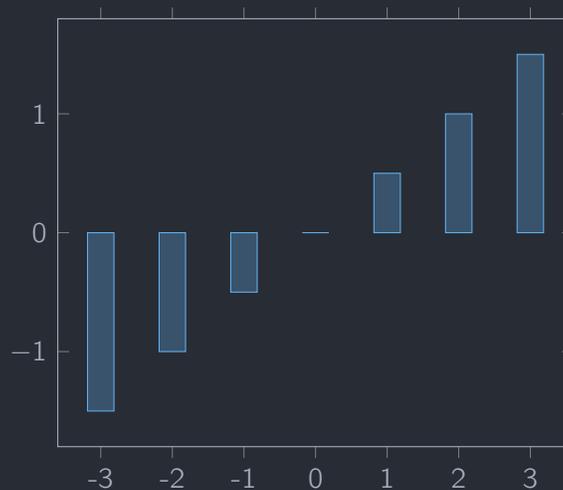
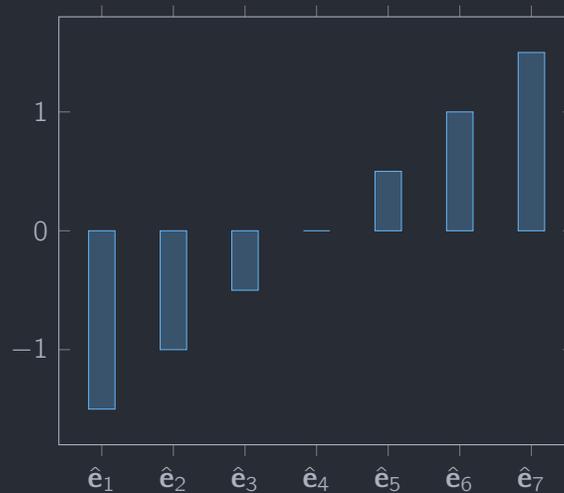
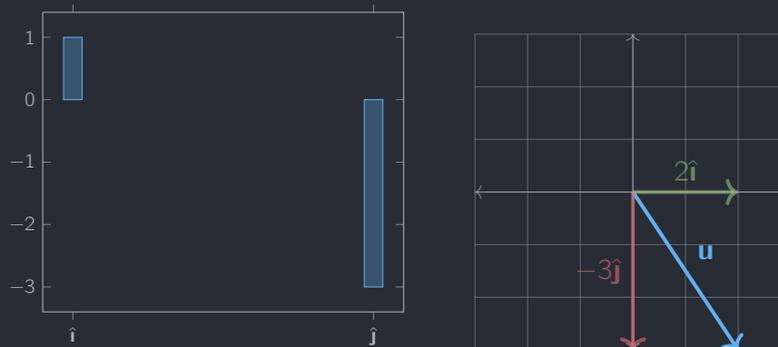


Figura 2.1: Función en espacio de números enteros

Podemos reinterpretar esto como una representación vectorial de las que hemos tenido antes, renombrando cada categoría con un vector unitario  $\hat{e}_n$ :



Y de esta manera podemos entender una función como un vector, con los  $\hat{e}_n$  como vectores base. Aquí valdría la pena preguntarse, ¿qué representan exactamente estos vectores base? ¿Qué forma tienen? En el caso de los vectores de 2 y tres dimensiones, los vectores base eran a su vez vectores de la misma cantidad de dimensiones. En otras palabras, los vectores base tienen que ser de la misma "especie" que los vectores que representan. Por lo que tiene sentido pensar que los vectores base  $\hat{e}_n$  serán a su vez también funciones. Si son funciones, se evaluarían también en  $x$ , por lo que tendrían que tener el mismo dominio que nuestra función  $f(x)$ . Llamemos a estas funciones  $e_n(x)$ , de tal manera que  $\hat{e}_n = e_n(x)$ . Recordemos ahora que el producto punto de un vector con alguno de los vectores base unitarios nos daría la componente del vector en esa base, por ejemplo para un vector en 2D:



Tenemos el producto punto de  $\mathbf{u}$  con  $\hat{i}$  como:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{i} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) \cdot (\hat{i}) = (2\hat{i}) \cdot (\hat{i}) + (-3\hat{j}) \cdot (\hat{i}) = 2\delta_{ii}^1 - 3\delta_{ij}^0 = 2$$

Utilizando la identidad del producto punto vista en (2.1.2). Siguiendo esta misma lógica, para un vector de  $N$  dimensiones se debe cumplir también que:

$$\mathbf{v} \cdot \hat{e}_n = v_n$$

Donde  $v_n$  es la componente del vector  $\mathbf{v}$  en la base  $\hat{e}_n$ . En nuestro caso, tenemos una función  $f(x)$ , una base de funciones  $e_n(x)$  y una colección de puntos  $x_n$  que forman el dominio de  $x$ . Entonces, para obtener las componentes

de  $f(x)$  sobre una base tenemos:

$$f(x) \cdot e_n(x) = f(x_n)$$

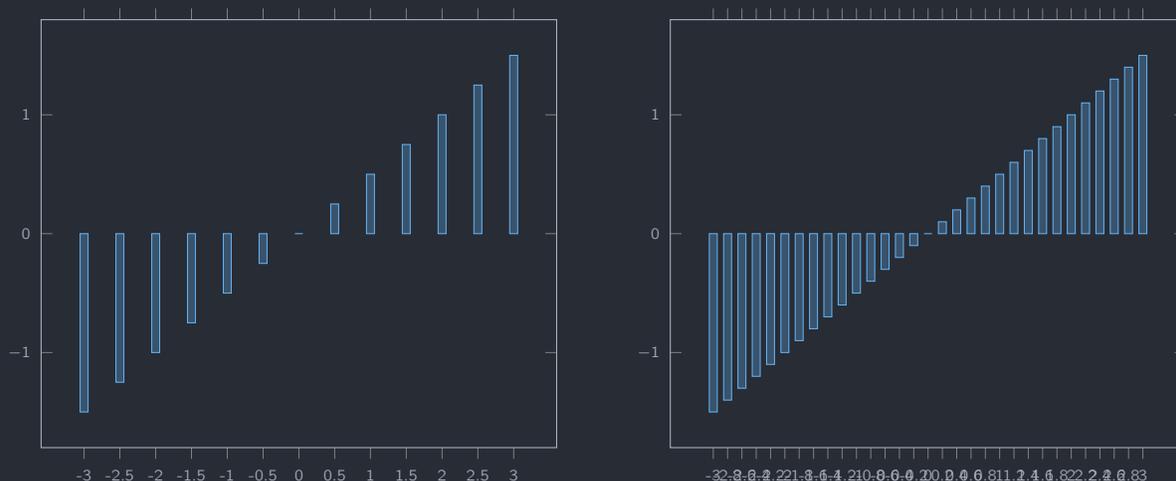
Además, se tiene que cumplir que las funciones base  $e_n(x)$  sean ortonormales:

$$e_n(x) \cdot e_m = \delta_{nm}$$

Nótese que aquí “ $\cdot$ ” sigue representando el producto punto. Las funciones bases sirven como seleccionadoras, de manera al obtener el producto punto de la función  $f(x)$  con  $e_n(x)$  nos queda solo el valor de  $f(x_n)$ , que es un solo punto, y ya no toda la función. Podríamos entonces expresar la función  $f(x)$  como una serie de puntos  $f(x_0)$  multiplicados por su función base:

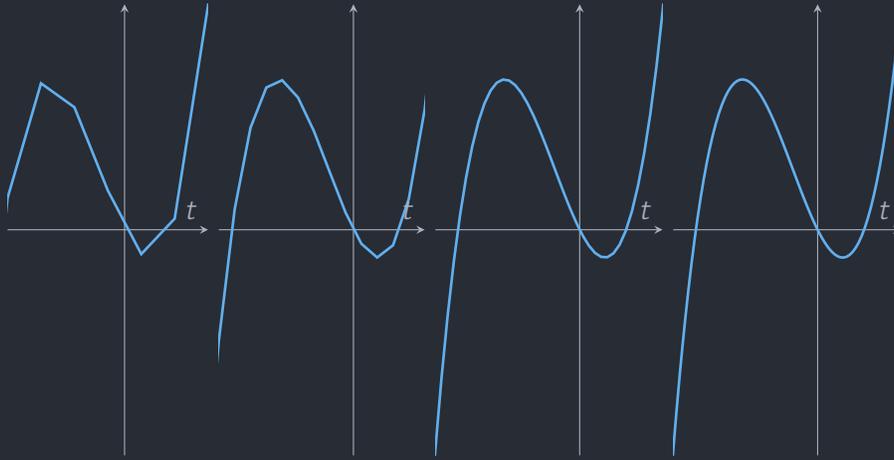
$$f(x) = f(x_1)e_1(x) + f(x_2)e_2(x) + \cdots + f(x_N)e_N = \sum_{n=1}^N f(x_n)\hat{e}_n \quad (2.2.1)$$

Esta representación de la función la hace dependiente de la dimensión en la que trabajemos, de manera que  $f(x)$  puede ser diferente a sí misma si se consideran diferentes dominios. Esto no es ningún problema, pues establecimos anteriormente que lo que le da el atributo de vector a la función  $f$  es precisamente el dominio de  $x$ . En el primer ejemplo escogimos 7 puntos como dominio de  $x$ , pero podríamos escoger 13, o 31, o los que sean. A continuación se muestra un ejemplo con más puntos, y por ende mayor dimensión. En cada caso seguimos tomando puntos dentro del rango de  $-3$  a  $3$ , pero considerando más valores en medio. Además, en vez de colocar  $\hat{e}_n$  como el nombre de cada vector base, colocamos el valor numérico del punto  $x_n$ , para que se entienda mejor la gráfica:



Entre más números tenemos, se hace más complicado distinguirlos entre sí. En este caso llegamos a las limitaciones de nuestra representación: cuando tenemos muchas dimensiones se vuelve tedioso darle un nombre a todas. Se vuelve mejor nombrar solo unas bases, ya que de todas formas el resto de las bases sería solamente nombrarlas por el número en medio de las demás. Es decir, no necesitamos nombrar cada base porque el nombre de la base se puede inferir del nombre de las demás. En el caso anterior, pudimos haber omitido el nombre de las bases  $-2.5$ ,  $-1.5$ ,  $-0.5$ , etc., pues se entiende que si la base está a la mitad entre, por ejemplo,  $-3$  y  $-2$ , tendrá el nombre de  $-2.5$ . De manera similar para el caso de la derecha, si tenemos 5 barras por entero, se asume que estas van en incrementos de  $1/5$ , o  $0.2$ . Así, podemos simplificar nuestro modelo de 31 dimensiones nombrando únicamente los vectores base correspondientes a los números enteros:





Podemos ver como cambia la figura para 10, 20, 50 y 100 puntos. Nótese como entre más puntos tenemos, mejor se aprecia la curva de verdad. Hay muchos de los puntos que están en la línea para la primera gráfica que en realidad no forman parte de la función, son solo aproximaciones lineales de la curva. Aquí se ve demostrada nuevamente la propiedad de ortonormalidad de la base, pues un punto  $x_n$  no nos puede dar información sobre otro punto  $x_m$ , pues no podemos obtener información de  $\hat{\mathbf{e}}_m$  a partir de  $\hat{\mathbf{e}}_n$ , ni de cualquier otro vector base que no sea  $\hat{\mathbf{e}}_m$ . En este sentido, entre más puntos tenemos, más información tenemos, hasta llegar a infinito. Esto presenta un problema al momento de intentar calcular el producto punto entre dos funciones. Veamos, por ejemplo, el cálculo del producto punto de la función  $f(x)$  consigo misma. Recordemos que para un vector cualquiera:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$$

Partiendo de la definición del producto punto con coseno en (1.3.1), ya que el ángulo del vector consigo mismo sería 0, y  $\cos(0) = 1$ . Aplicando esto a la función  $f(x)$ :

$$f(x) \cdot f(x) = \left( \sum_n^N f(x_n) \hat{\mathbf{e}}_n \right) \cdot \left( \sum_m^N f(x_m) \hat{\mathbf{e}}_m \right) = |f(x)|^2$$

Podemos juntar las sumas:

$$|\mathbf{v}|^2 = \sum_n^N \sum_m^N f(x_n) f(x_m) \hat{\mathbf{e}}_n \cdot \hat{\mathbf{e}}_m$$

Por la identidad de una base ortonormal (2.1.2):

$$|\mathbf{v}|^2 = \sum_n^N \sum_m^N f(x_n) f(x_m) \delta_{nm}$$

Y como la Delta de Kronecker es cero siempre que  $n \neq m$ , solo sumamos los términos donde  $n = m$ , por lo que se convierte en una suma solo sobre  $n$  donde el índice  $m$  es igual a  $n$ :

$$|\mathbf{v}|^2 = \sum_n^N f(x_n) f(x_n) = \sum_n^N [f(x_n)]^2$$

Esto se conoce también como el Teorema de Pitágoras de  $N$  dimensiones. Sin embargo, tiene un problema: conforme

crece  $N$ , la suma también crece. Y como una función puede tener espacio de dimensión infinita, el producto punto explotaría hacia el infinito y perdería su utilidad. Tenemos entonces la necesidad de definir un nuevo producto punto que sirva para arreglar este problema encontrado al lidiar con dimensiones grandes. La idea es incluir un factor de escala para que se **normalice**, de tal forma que el producto converja aun cuando el número de dimensiones se vaya a infinito. Para esto podemos pensar en algo que tengan en común todas las representaciones de la función, sin importar el número de puntos: el área debajo de la función. Si en vez de sumar las componentes de cada base, sumamos el área del rectángulo que se forma, que cada vez es más pequeño porque su ancho depende de la distancia entre puntos, tendremos siempre un resultado finito. Sea  $\Delta x$  la distancia entre dos puntos adyacentes  $x_n$  y  $x_{n+1}$ , que se mantiene para cualquier par de puntos adyacentes en el dominio de la función. Definimos el producto punto más general, al que llamamos **producto interno**, de la siguiente manera:

$$\langle f(x)|g(x) \rangle = \sum_n^N f(x_n)g(x_n)\Delta x$$

Cuando  $N$  tiende a infinito,  $\Delta x$  tiende a cero, y tenemos una integral:

$$\langle f(x)|g(x) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N f(x_n)g(x_n)\Delta x = \int f(x)g(x) dx$$

La integral se hace sobre el espacio (dominio) de la función, y se acostumbra que éste sea en todo el espacio de los números reales. Por esta razón, es común encontrar el producto interno de una función definido como:

$$\langle f(x)|g(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx \quad (2.2.2)$$

Ahora que tenemos esta definición del producto interno, podemos finalmente desenmascarar las funciones  $e_n(x)$ . Según la definición recién obtenida, se cumple que:

$$\langle e_n(x)|f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} e_n(x)f(x) = f(x_n)$$

Existe ya una definición de una pseudo-función que cumple esta propiedad, y se le conoce como la **Delta de Dirac**  $\delta(x)$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x) = f(0)$$

Que se puede interpretar como un impulso, una función que está definida únicamente en el punto  $x = 0$  en cualquier otro punto del espacio es igual a cero. El valor de  $\delta(0)$  es irrelevante, lo que nos interesa es que sea lo suficientemente alto como para que la integral de la función nos de justamente  $f(0)$ . Se puede recorrer la función a un punto  $x_0$ , de manera que la integral nos regrese la función evaluada en  $x = x_0$ , en vez de en  $x = 0$ :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (2.2.3)$$

De esta manera podemos definir nuestras bases como:

$$\hat{e}_n = e_n(x) = \delta(x - x_n)$$

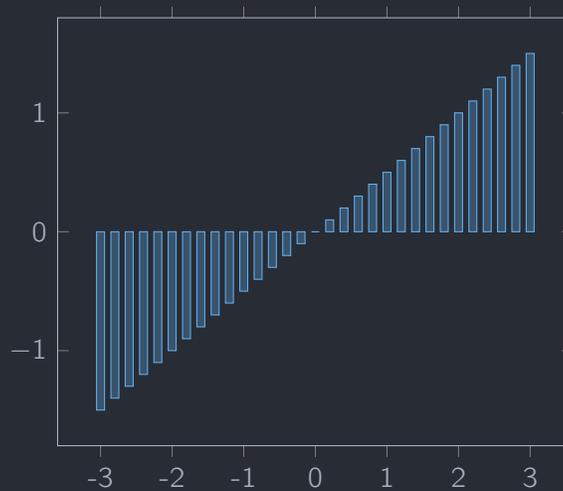
Se puede comprobar rápidamente con (2.2.3) lo siguiente:

$$\langle \delta(x - x_n) | f(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_n) f(x) = f(x_n)$$

Y podemos reescribir la ecuación (2.2.1) como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \delta(x - x_n) | f(x) \rangle \quad (2.2.4)$$

Ahora utilizando un número infinito de vectores base, en vez de un número limitado  $N$ . Esto porque, estrictamente hablando, cuando tenemos una variable  $x$  en el espacio real, hablamos de números racionales, y hay una cantidad infinita de éstos. Esta es la base natural de las funciones, porque es muy evidente que serán ortogonales, ya que  $\delta(x - x_n)$  no tiene ningún componente en  $\delta(x - x_m)$ , pues solo está definida en el punto  $x_n$ , por lo que  $f(x_m - x_n) = 0$ . De la misma manera que es evidente que el vector  $\hat{i}$  es ortogonal a  $\hat{j}$  porque no se contienen mutuamente, es fácil ver gráficamente que esta base de Deltas de Dirac es ortogonal:



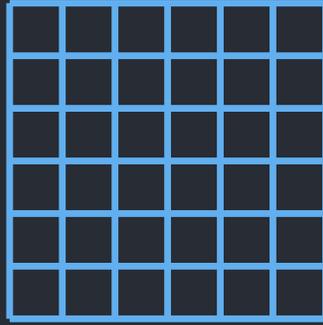
Sin embargo, podemos encontrar otra base de la que no sea evidente esta ortogonalidad, así como encontramos la base

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{j} \quad \hat{e}_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}$$

Para el espacio de dos dimensiones. En este caso, los vectores  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  tienen ambos componentes en tanto  $\hat{i}$  como en  $\hat{j}$ , por lo que no es evidente a primera vista que sean ortogonales. Pero, ¿por qué cambiar de base?

## 2.3. Restricciones en el espacio

En la vida real, el uso de un nuevo sistema de referencia o de vectores base surge a partir de una restricción en el espacio. Por ejemplo, si tuviéramos unas calles en estilo Manhattan:



Lógicamente, pensaríamos en que nos podemos mover únicamente en direcciones horizontal y vertical, i.e.  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ . Tendría sentido expresar cualquier vector de movimiento en términos de múltiplos enteros de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , pues son las únicas direcciones posibles. También podríamos encontrarnos, por ejemplo, corriendo alguna carrera en la que la pista tiene forma de círculo con radio  $R$ , y en ese caso nuestro movimiento está restringido por la ecuación:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Como vimos en la Figura A.1, porque se forman triángulos rectángulos con lados  $x$  y  $y$  y con hipotenusa  $R$ . En este caso, la solución de la ecuación es un valor de  $x$  y  $y$ , pues es una ecuación numérica. Sin embargo, existen también las llamadas ecuaciones diferenciales, cuya solución es una función. Por ejemplo, la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = F$$

Que nos dice que la fuerza total es igual a la masa por la aceleración, y ésta a su vez es igual a la segunda derivada de la fuerza. Si la fuerza es una constante, llegamos a una solución de la forma:

$$x = at^2 + bt + c$$

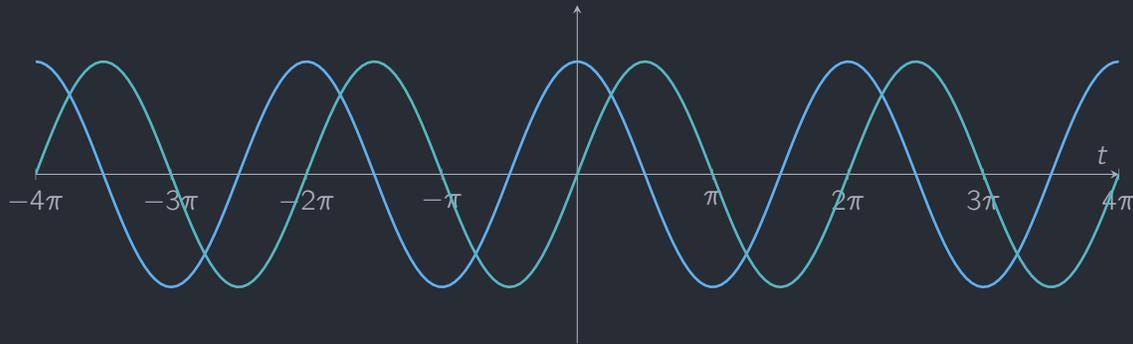
Podríamos decir que  $x$  es una función que se construye a partir de las funciones base  $e_1(t) = t^2$ ,  $e_2(t) = t$  y  $e_3(t) = 1$ . Si multiplicamos cada función por alguna constante  $a$ ,  $b$  y  $c$ , obtendremos una posible solución. Y cada solución puede escribirse como una suma de otras soluciones. A esto se le conoce como principio de **superposición**. Hay ecuaciones más interesantes, como la ecuación de onda en una dimensión:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

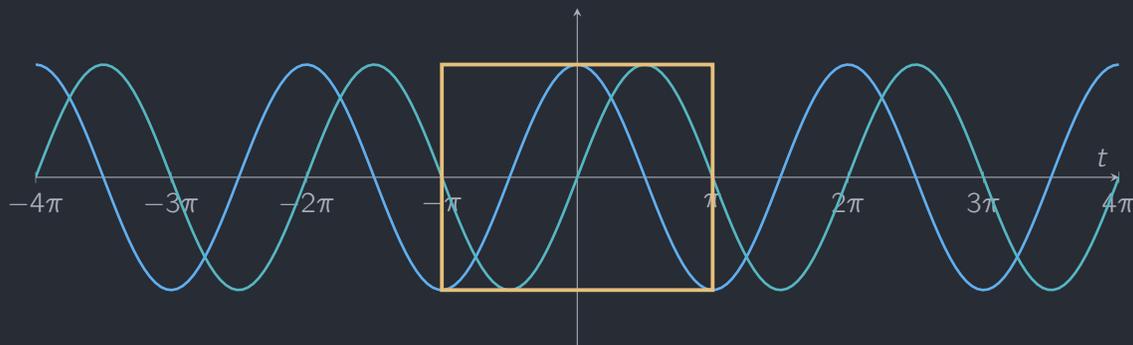


## 2.4. La Serie de Fourier

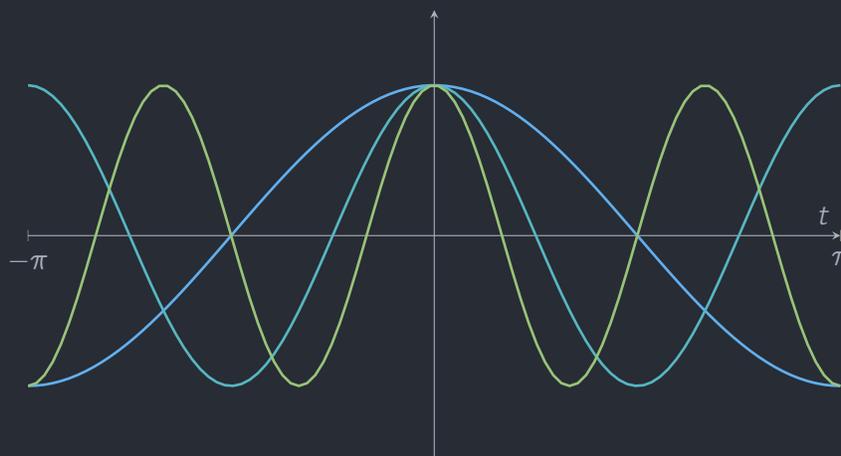
Para buscar una base ortonormal necesitamos que el producto interno entre las bases sea cero, y para hacer esto tendríamos que estar probando con grupos de funciones, pues recordemos que la base debe ser de dimensiones infinitas. Para esto nos sirven las restricciones, como las de ecuaciones diferenciales, que nos guían por un camino para encontrarlas más fácilmente. En nuestro caso, trataremos de ver una base con funciones de tipo senos y cosenos, según la forma de las soluciones de la ecuación de onda, como  $\cos(kt)$  y  $\sin(kt)$ , i.e. en función del tiempo. Esto no cambia nada en la teoría que hemos construido hasta ahora, solo es una forma diferente de pensarlo, pues ahora el dominio está en los valores de  $t$ , en vez de los valores de  $x$ . Veamos primero como se comportan estas funciones para  $k = 1$ , i.e.  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$ :

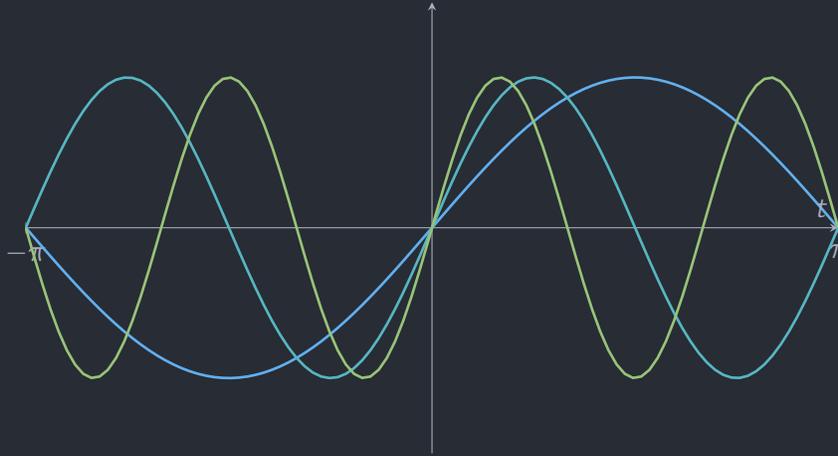


Se puede ver que son periódicas, específicamente con periodo  $2\pi$ :



Podemos entonces concentrarnos en uno solo de estos periodos, que se repetirán a lo largo del espacio, y ahora veamos para diferentes valores de  $k$ :





Tenemos en cada figura  $\cos(t)$ ,  $\sin(t)$ ,  $\cos(2t)$ ,  $\sin(2t)$ ,  $\cos(3t)$ ,  $\sin(3t)$ . Algo interesante a ver es que en el caso del coseno, todas las frecuencias empiezan en 1 cuando  $t = 0$ , y en las orillas, cuando  $t = \pi$ , tienen valores alternados entre 1 y  $-1$ . Por su parte, el seno empieza siempre en 0 cuando  $t = 0$  y en las orillas, cuando  $t = \pi$ , también. Podemos ver que las funciones con mayor  $k$  parecen tener un periodo más pequeño, pues aún dentro del periodo de  $2\pi$  se repiten. Pero en general, se puede definir un periodo de  $2\pi$  para todas las  $k > 1$  también. Entonces, hace más sentido restringir el dominio de la función de  $-\pi$  a  $\pi$ . Ahora sí podemos analizar el producto interno, de la siguiente manera:

$$\langle \cos(nt) | \sin(mt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt$$

Veamos cuál es el resultado de esta integral. Podemos darnos cuenta de que  $\cos(nt)$  es una función impar, mientras que  $\sin(mt)$  es una función par. De manera que el producto de éstas es una función impar, y como tenemos un intervalo simétrico, la integral dará cero:

$$\langle \cos(nt) | \sin(mt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

Esto es bueno, pues nos indica que senos y cosenos son ortogonales entre sí. Sin embargo, esto no nos basta, pues también los cosenos deben ser ortogonales entre sí, y los senos. Es decir, tenemos que evaluar todavía:

$$\langle \cos(nt) | \cos(mt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt \quad (2.4.1a)$$

$$\langle \sin(nt) | \sin(mt) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mt) dt \quad (2.4.1b)$$

Evaluar estas integrales directamente no es posible, tendremos que hacer uso de algunas identidades trigonométricas que nos simplifiquen el problema. Por la forma que tiene, podemos utilizar la identidad de suma de argumentos del coseno (A.3.2), dada como:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\beta \cos\alpha \mp \sin\beta \sin\alpha$$

De esta identidad podemos sacar dos identidades, una con la suma y otra con la resta, de las que podríamos despejar los productos de seno con seno y coseno con coseno. Si sustituimos  $\alpha = nt$  y  $\beta = mt$  obtenemos las dos





De donde sale

$$\sin(nt) \sin(mt) = \frac{\cos[(n-m)t] - \cos[(n+m)t]}{2} \quad (2.4.4)$$

Con esto podemos resolver la integral (2.4.1b) de la misma manera que (2.4.1a), se llega con un procedimiento análogo a:

$$\langle \sin(nt) | \sin(mt) \rangle = \pi \delta_{nm} \quad (2.4.5)$$

Entonces, la base formada de los  $\cos nt$  y  $\sin mt$  cumple todas las características de una base ortogonal. Nos faltaría normalizarla, dividiendo entre  $\pi$ :

$$\frac{1}{\pi} \langle \cos(nt) | \cos(mt) \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \sin(nt) | \sin(mt) \rangle = \delta_{nm} \quad (2.4.6)$$

Podemos entonces expresar una función  $f(t)$  en términos de esta base como lo hicimos con la base natural de las Deltas de Dirac en (2.2.4):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \langle \cos(nt) | f(t) \rangle \cdot \cos(nt) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \langle \sin(mt) | f(t) \rangle \cdot \sin(mt) \quad (2.4.7a)$$

Esto se puede simplificar más, considerando que los  $\langle \cos(nt) | f(t) \rangle$  y  $\langle \sin(mt) | f(t) \rangle$  son los coeficientes de la función  $f(t)$  sobre las bases de cosenos y senos, por lo que podemos darles nombre de la siguiente manera:

$$a_n \equiv \frac{1}{\pi} \langle \cos(nt) | f(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt \quad b_m \equiv \frac{1}{\pi} \langle \sin(mt) | f(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) dt \quad (2.4.7b)$$

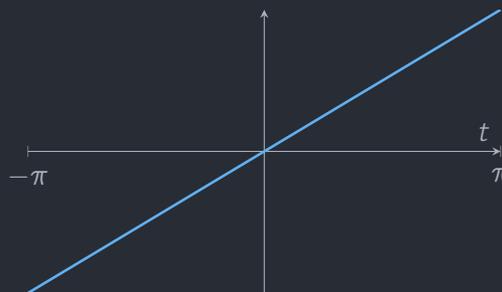
Recordando la definición del producto punto en esta base, tomando solo el dominio de  $[-\pi, \pi]$ . De aquí sale la expresión simplificada

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(mt) \quad (2.4.7c)$$

Como los índices  $n$  y  $m$  tienen el mismo rango, podemos juntar ambas sumatorias en una sola:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \quad (2.4.7d)$$

Y listo, lo hemos logrado: llegamos a la expresión de la **Serie de Fourier**, que nos sirve para representar una función en términos de una base de senos y cosenos de diferentes frecuencias. Es importante mencionar que la Serie de Fourier sirve exclusivamente para funciones que están definidas solo en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , por eso el producto interno se hace solo dentro de este dominio. Podemos tomar una función cualquiera y recortar su dominio para poder hacer una representación de Fourier. Si tenemos, por ejemplo, la función  $f(t) = t$ . Tendríamos:



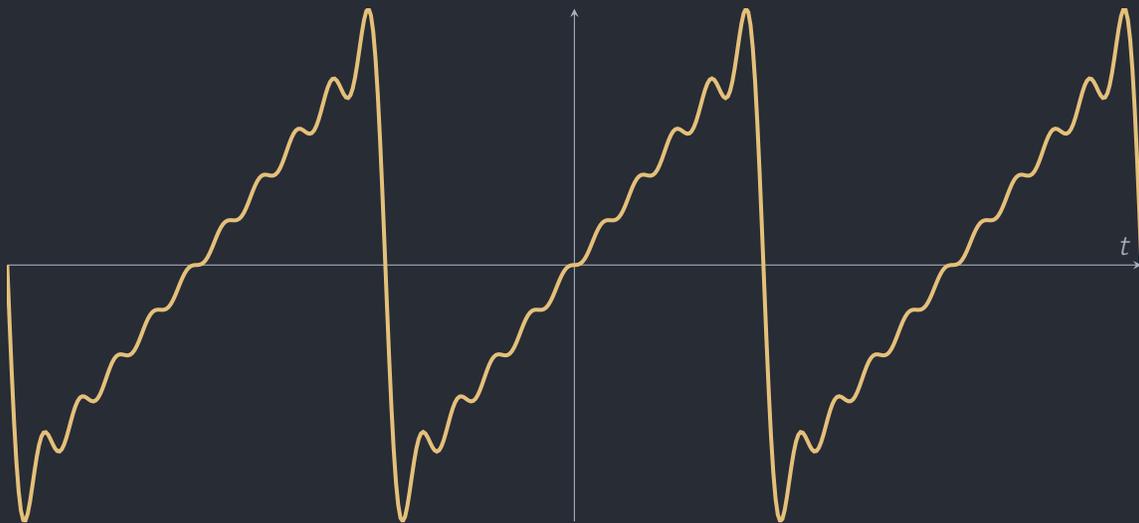
Podemos expresar esta función en la base de Fourier, pero como una aproximación:

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^N [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

Para un número finito de  $N$ , porque en el mundo real solo podemos trabajar con elementos finitos, y además podemos conseguir muy buenos resultados para  $N$  no muy grandes, sin necesidad de llegar a infinito. Por ejemplo, tomemos dos valores:  $N = 5$  y  $N = 10$ :



Entre más términos de la suma incluyamos más parecida se vuelve a la función real, y en el infinito se hace exactamente igual. Como los senos y cosenos son periódicos en  $2\pi$ , tenemos que se repetirá la gráfica muchas veces, como se ve a continuación:



Pero aquí tenemos una restricción, porque estamos limitados a que la función esté definida únicamente en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Tenemos que las ondas tienen un periodo de  $2\pi$ , y si consideramos la relación entre la frecuencia y el periodo:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Donde  $f$  es la frecuencia temporal y  $\omega$  es la **frecuencia angular**, acomodado de tal manera que las frecuencias no nos queden en términos de  $\pi$ , sino que más bien una frecuencia de  $k = 1$  represente una vuelta completa al círculo de  $2\pi$ . Tenemos la frecuencia base  $\omega_1 = 1$ , que es la fundamental (en  $n = 0$  simplemente tenemos  $\omega_0 = 0$ , esto no es una frecuencia fundamental). Todos los senos y cosenos tienen frecuencias múltiplos de  $\omega_1$ , i.e.  $2\omega_1$ ,  $3\omega_1$ , etc. Si quisiéramos medir una frecuencia  $\omega'$  que no se pueda expresar como un múltiplo entero de  $\omega_1$ , no es posible con nuestro modelo actual. Debemos cambiar  $\omega_1$  de manera que  $\omega' = k\omega_1$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ . Pero al cambiar  $\omega_1$ , se cambiaría también el periodo  $T_0$ , y por lo tanto cambia también el dominio sobre el que se hace el producto interno. Como empezamos en 0, el dominio sería  $[-T_0/2, T_0/2]$ , y estos serían los límites de la integral también. Entonces tenemos:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nf_1 t) + b_n \sin(nf_1 t)] \quad (2.4.8a)$$

Si establecemos el periodo como  $T$  y recordamos que  $f_1 = 2\pi\omega_1$ , tenemos los coeficientes definidos como:

$$a_n \frac{2}{T} \equiv \langle \cos(2\pi n\omega_1 t) | f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi n\omega_1 t) f(t) dt \quad (2.4.8b)$$

$$b_n \equiv \frac{2}{T} \langle \sin(2\pi n\omega_1 t) | f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi n\omega_1 t) f(t) dt \quad (2.4.8c)$$

Y si expresamos la frecuencia angular  $\omega$  en términos del periodo  $T$ , tenemos:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right] \quad (2.4.9a)$$

Con los coeficientes definidos como:

$$a_n \equiv \frac{2}{T} \left\langle \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \middle| f(t) \right\rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) f(t) dt \quad (2.4.9b)$$

$$b_n \equiv \frac{2}{T} \left\langle \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \middle| f(t) \right\rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) f(t) dt \quad (2.4.9c)$$

Y ahora podemos definir la Serie de Fourier para una función en el dominio  $[-T/2, T/2]$ . Hemos llegado hasta aquí, y ahora introduciremos los números complejos para simplificar aún más la Serie de Fourier.

## 2.5. La Serie de Fourier: Versión Compleja

Antes de leer este capítulo se recomienda fuertemente revisar el Apéndice Números Complejos sobre Números Complejos. Teemos por la identidad de Euler (D.2.1):

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Si escogemos  $\phi = \frac{2\pi n}{T}it$ , tendríamos:

$$e^{\frac{2\pi n}{T}it} = \exp\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + i \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (2.5.1)$$

Vemos una similitud con (2.4.9b). Si multiplicamos la ecuación por un número complejo  $z = \alpha + i\beta$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} ze^{i\phi} &= (\alpha + i\beta)(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \alpha \cos \phi + i\beta \cos \phi + i\alpha \sin \phi - \beta \sin \phi \\ &= (\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi) + i(\beta \cos \phi + \alpha \sin \phi) \end{aligned}$$

Sin embargo, tenemos una parte real y una parte imaginaria, y en nuestra serie original sólo había números reales, por lo que no podemos utilizar esta cantidad de la manera en que está mostrada. Nos gustaría obtener únicamente la parte real, i.e.:

$$\Re(ze^{i\phi})$$

En este caso, la parte que no tiene multiplicando  $i$ :

$$\Re(ze^{i\phi}) = (\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi)$$

Nótese la similitud con  $a_n \cos(\omega t) + b_n \sin(\omega t)$ . Entonces podemos armar nuestra serie con coeficientes  $\gamma_n \in \mathbb{Z}$  si tomamos únicamente la parte real de éstos. Los coeficientes están definidos como el producto interno de la base con la función:

$$\gamma_n \equiv \frac{2}{T} \left\langle \exp\left(i\frac{2\pi n}{T}t\right) \middle| f(t) \right\rangle$$

Y debido al producto interno de vectores complejos, tenemos:

$$\gamma_n \equiv \frac{2}{T} \left\langle \exp\left(i\frac{2\pi n}{T}t\right) \middle| f(t) \right\rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(-\frac{2\pi n}{T}t\right) f(t) dt \quad (2.5.2)$$

Nótese que el argumento de la exponencial se hace negativo en la integral, porque tenemos que sacar el conjugado según (D.5.1). Finalmente, nos interesa únicamente la parte real de estos coeficientes, así que la calculamos:

$$\Re(\gamma_n) = \Re \left[ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(-i\frac{2\pi n}{T}t\right) f(t) dt \right]$$



Recordando la definición de la frecuencia angular  $\omega = 2\pi/T$  y  $\omega_n = n\omega_1$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad c_n \equiv \frac{1}{T} \langle e^{-i\omega_n t} | f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t) dt \quad (2.5.6)$$

En realidad, esto solo una simplificación de notación, no hace la integral más fácil de calcular, tenemos que hacer exactamente los mismos cálculos. La ventaja es que queda expresada de manera más compacta y también nos podemos dar cuenta que, a diferencia de tener los senos y cosenos por separado, tenemos todo junto, por lo que podemos asociar un coeficiente  $c_n$  a cada frecuencia. Estos coeficientes nos dirán entonces la presencia de la frecuencia angular  $\omega_n = n\omega_1$  en la función a medir. Como ahora tenemos definida la Transformada de Fourier para cualquier periodo  $T$ , podemos finalmente analizar señales como las que vimos en el capítulo de Introducción en la Figura 0.1.

## 2.6. La Transformada de Fourier

Ahora se viene una pregunta interesante. Hemos establecido que el periodo  $T$  puede tomar el valor que sea. Pero, ¿qué ocurre cuando  $T \rightarrow \infty$ ? Es decir, si tomamos todo el espacio de números reales, para funciones que no son periódicas en absoluto. Nos interesa ver qué ocurre con los coeficientes  $c_n$  [5]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right]$$

Tenemos que  $\omega_n = n\omega_1 = n/T$  es la frecuencia angular del hármonico  $n$ . Definimos:

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

De manera que podemos definir los coeficientes  $c_n$  utilizando  $F(\omega_n)$  a partir de la ecuación (2.5.6):

$$c_n = \frac{1}{T} F(\omega_n)$$

Y entonces podemos expresar  $f(t)$  en términos de esta nueva definición compacta de  $c_n$ :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

Podemos expresar  $T$  en términos de la frecuencia angular base, i.e  $\omega_1$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

En el límite  $T \rightarrow \infty$ , la frecuencia base será prácticamente 0 (pues la "onda" no se repite, ya que completa apenas un periodo en todo el espacio), lo que resulta problemático para el límite. Podemos hacer un truco, y es que la diferencia entre  $\omega_n$  y  $\omega_{n+1}$  es precisamente  $\omega_1$ , debido a que  $\omega_n = n\omega_1$ . Entonces podemos definir  $\omega_1 \equiv \Delta\omega$ , y entonces tenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Y entonces para  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} F(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

Reestructurando:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

Veamos ahora sí el límite con  $T \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega \right]$$

En el límite podemos ver claramente que  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , y entonces podemos entender la suma como una suma de Riemann, que se convierte en una integral en el límite  $L \rightarrow \infty$ , con  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.6.1)$$

De manera que pasaremos por todas las posibles frecuencias  $\omega$ , dado que  $\Delta\omega$  es muy bajo. A esto que tenemos aquí le llamamos la **Transformada Inversa de Fourier**, mientras que:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.6.2)$$

Esto es meramente una convención, pero se entiende de manera que la Transformada de Fourier nos pasa de una función  $f(t)$ , en el espacio del tiempo, a una función  $F(\omega)$ , en el espacio de frecuencias. Por lo que la ecuación (2.6.1) queda como la transformada inversa, ya que nos regresa al espacio de tiempo original. Básicamente, la Transformada de Fourier nos da los componentes  $c_n$ , que nos indican las amplitudes de cada frecuencia angular  $\omega_n$  (o frecuencia  $f_n$ ), pero para un caso contínuo donde pasamos por todas las frecuencias. Antes teníamos un número limitado de frecuencias que eran múltiplos enteros de la fundamental, pero al hacer  $\omega_0 \rightarrow 0$ , podemos pasar por todas las frecuencias posibles. Por su parte, la Transformada de Fourier Inversa nos presenta la Serie de Fourier, los  $c_n$  multiplicados por la base  $e^{-i\omega t}$ , en forma de integral porque estamos haciendo una suma sobre valores contínuos, sobre todas las frecuencias posibles (por eso la integral en  $d\omega$ ), y se agrega el factor  $2\pi$  como normalización, similar a cómo antes dividíamos entre el período. En resumen, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

La única diferencia es que ahora pasamos por todas las frecuencias y el dominio es todo el espacio de los números reales. Lo interesante que podemos ver es la simetría que tiene la transformada de su inversa.

## 2.7. La Transformada Discreta de Fourier: Señales Digitales

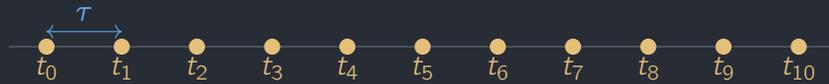
Para hacer una integral requerimos de un espacio continuo, pero en el contexto digital tenemos un espacio discreto, una cantidad finita de bits a procesar, y la integral se convierte en una aproximación por medio de una suma sobre un vector discreto  $\mathbf{t}$  de dimensión  $N$  dado como:

$$\mathbf{t} = \langle t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1} \rangle$$

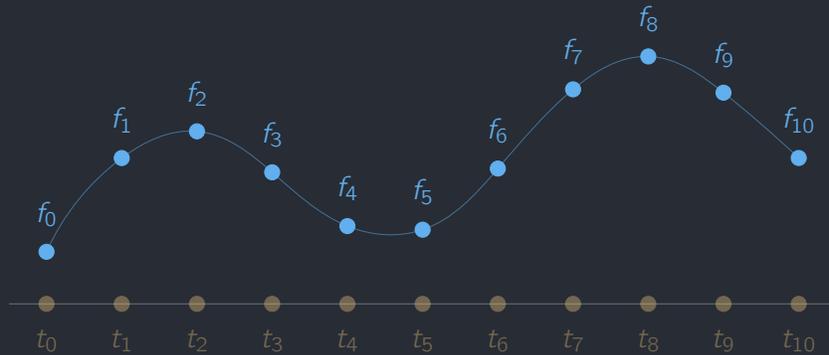
Donde los  $t_k$  son diferentes puntos en el tiempo. Si consideramos que todos los tiempos tienen el mismo espaciado entre sí,  $t_{k+1} - t_k = \tau$ , podemos expresarlos como:

$$t_k = k\tau$$

Gráficamente, tendríamos lo siguiente:



Donde cada punto es un  $t_k$ , i.e. una muestra del tiempo  $\mathbf{t}$ . Ahora tenemos un espacio reducido a dimensión  $N$ , partiendo del vector infinito de  $\mathbf{t}$  y tomando muestras de éste separadas por espacios  $\tau$ . Por lo que una función,  $f(\mathbf{t})$  se vuelve una serie de puntos  $f(t_k)$  en este espacio, que podemos definir como  $f_k$ :



Recordemos ahora cómo definimos la serie de Fourier como un cambio de base a funciones trigonométricas, o en el caso de la transformada compleja a exponenciales complejas, sumando cada una de éstas multiplicada por la proyección de la función sobre las mismas:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{K} \langle e^{i\omega_n t} | f(t) \rangle e^{i\omega_n t}$$

Donde  $K$  es un factor de normalización, para que la proyección sea válida (escalando el producto interno en vez de hacer el vector unitario previamente). Esto se cumple siempre y cuando la base  $\{e^{i\omega_n t}\}$  sea ortogonal. Hemos comprobado que, para un espacio infinito, se cumple la ortogonalidad de senos y cosenos, y por tanto de exponenciales complejas. Sin embargo, debemos comprobar que esto se cumple también para un espacio de dimensiones limitadas, donde tomamos únicamente puntos muestra de la función y no todo el espacio de números reales. [3]



Esto implica que el argumento debe ser un múltiplo entero de  $2\pi$ :

$$N\tau(\omega - \omega') = 2\pi n \Rightarrow \omega - \omega' = \frac{2\pi n}{N\tau}$$

Si definimos  $f_s \equiv 1/\tau$  como la frecuencia de muestreo, i.e. cada cuanto tiempo tomamos una muestra, tenemos:

$$\omega - \omega' = \frac{2\pi n}{N} f_s$$

Esta diferencia de frecuencias puede tomar diferentes valores según  $n$ , lo que implica la existencia de una diferencia mínima  $\Delta\omega$ , que claramente es 0 para  $n = 0$ , pero nos interesa el siguiente valor más pequeño,  $n = 1$ :

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} f_s$$

Esto implica que tenemos también un muestreo para las frecuencias  $\omega$ , que están separadas por un  $\Delta\omega$  entre sí, análogo a  $\Delta t = \tau$ . Entonces, podemos definir frecuencias  $\omega_n$ , al igual que los  $t_k$ , como múltiplos enteros de  $\tau$ :

$$\omega_n = n\Delta\omega = \frac{2\pi n}{N} f_s \quad (2.7.1)$$

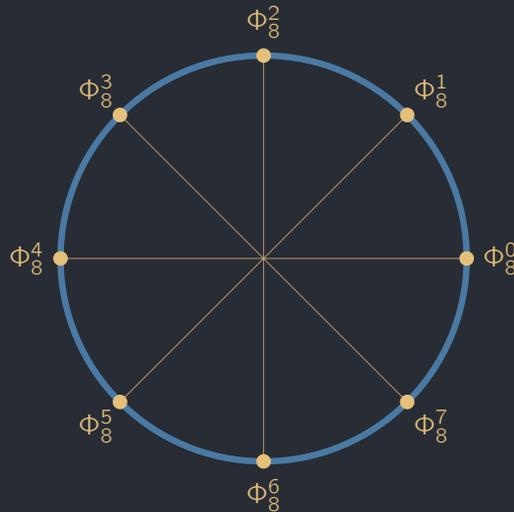
Pero dada la periodicidad de las exponenciales complejas, solo son relevantes los valores  $n \in [0, N)$ . Definimos la fase  $\Phi_N$  como:

$$\Phi_N = e^{i\frac{2\pi}{N} f_s}$$

Y si la elevamos a la  $n$  obtenemos justamente  $e^{i\omega_n}$ :

$$\Phi_N^n = \left( e^{i\frac{2\pi}{N} f_s} \right)^n = e^{i\frac{2\pi n}{N} f_s} = e^{i\omega_n} \quad (2.7.2)$$

Podemos graficar estos valores en un círculo unitario, para  $N = 8$ :



Es evidente que  $\Phi_N^N = \Phi_N^0$ , nuevamente por la periodicidad. Por lo que solo tenemos esas  $N$  frecuencias, de  $\omega_0$  a  $\omega_{N-1}$ , al igual que con el tiempo:

$$\boldsymbol{\omega} = \langle \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1} \rangle$$

Volviendo a la expresión anterior, tenemos entonces la función  $f(t_k)$  definida como:

$$f(t_k) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} \langle f(\mathbf{t}) | e^{i\omega_n \mathbf{t}} \rangle e^{i\omega_n t_k}$$

La principal diferencia con la Serie de Fourier es que ya no estamos aproximando la función por tener un número finito de puntos, pues aquí nuestro espacio total es de  $N$  puntos, y si hacemos un cambio de base a  $N$  puntos, seguimos teniendo toda la información. La igualdad se cumple para cualquier valor de  $N$ , siempre y cuando recordemos que la función  $f(\mathbf{t})$  está definida únicamente en ciertos valores  $t_k$ . Encontramos ya que el producto interno de dos exponenciales nos dará  $N$ , por lo que la constante de normalización es igual a  $N$ . Esta sería la **Transformada Discreta de Fourier Inversa**:

$$f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} \quad (2.7.3)$$

Donde hemos definido la **Transformada Discreta de Fourier** (DFT) como:

$$F(\omega_n) = \langle f(\mathbf{t}) | e^{i\omega_n \mathbf{t}} \rangle$$

Dado que ya hemos obtenido el factor de normalización, podemos expresar el producto interno simplemente como una suma de multiplicación componente a componente, recordando tomar el conjugado de la exponencial por estar a la derecha del producto interno:

$$F(\omega_n) = \langle f(\mathbf{t}) | e^{i\omega_n \mathbf{t}} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\omega_n t_k}$$

Recordando cómo definimos  $\omega_n$  en (2.7.1):

$$F(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i \frac{2\pi n f_s t_k}{N}}$$

Recordando la definición de  $t_k = k\tau$  y  $f_s = 1/\tau$  llegamos finalmente a

$$F(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.7.4)$$

Podríamos redefinir la transformada de manera que el factor de  $N$  quede como  $\sqrt{N}$  y agregamos  $\sqrt{N}$  en la suma, para balancear y que sea simétrica:

$$F_S(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i2\pi nk/N} \quad (2.7.5)$$

$$f(t_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_S(\omega_n) e^{i2\pi nk/N} \quad (2.7.6)$$

A esta también se le conoce como DFT **normalizada**.

## 2.8. La Transformada Discreta de Fourier: Versión Matricial

Se recomienda fuertemente leer primero el Apéndice Álgebra Matricial, o tener conocimiento previo de matrices, para poder entender bien los conceptos que se presentan en esta sección. Recordemos la definición de  $\Phi_N$  de (2.7.2), como fase fundamental. Definimos otra fase  $\Omega_N$  de la siguiente manera:

$$\Omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad (2.8.1)$$

Si nos vamos a la transformada de Fourier en (2.7.4), podemos expresar la exponencial en términos de  $\Omega_N$ :

$$F(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{(-i\frac{2\pi}{N})(nk)} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left( e^{-i\frac{2\pi}{N}} \right)^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \Omega_N^{nk}$$

Dado que tenemos la multiplicación de los  $f_k$  con los  $\Omega_N^{nk}$ , y la suma va sobre los índices  $k$ , podemos reexpresar la suma como un producto punto de vectores, donde  $f_k$  y  $\Omega_N^{nk}$  son los componentes  $k$  de cada vector. Tendríamos entonces:

$$F(\omega_n) = f(\mathbf{t}) \cdot \Omega_N^n$$

Donde  $\Omega_N^n$  es un vector renglón:

$$\Omega_N^n = \left[ \Omega_N^{n \cdot 0} \quad \Omega_N^{n \cdot 1} \quad \dots \quad \Omega_N^{n \cdot (N-1)} \right], \quad \Omega_N^{n \cdot k} = e^{i\omega_n t_k}$$

A su vez, podemos definir un vector columna de la Transformada:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F_n = F(\omega_n)$$

Dado que cada una de las componentes del vector  $\mathbf{F}$  surge de un producto punto, motiva la idea de representar esto un producto matricial. Si nos fijamos bien,  $\Omega_N^{n \cdot k}$  tiene índices  $n$  y  $k$ , y la matriz renglón recorre sobre los índices  $k$ . Podemos entonces crear una matriz como en (C.3.1a) con la matriz  $\mathbf{A}$ , con  $n$  vectores renglón. Llamamos a esta matriz  $\mathbf{W}$ , y cada vector como  $\Omega_N^n =$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Omega_N^0 \\ \Omega_N^1 \\ \vdots \\ \Omega_N^{N-1} \end{bmatrix}$$



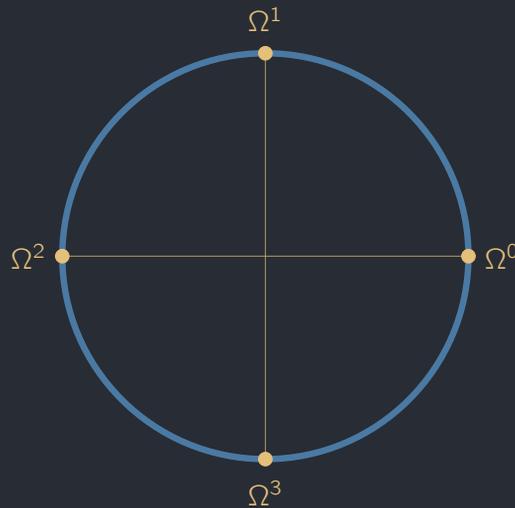


### 2.8.1. Ejemplo para 4 puntos

Veamos un ejemplo, para  $N = 4$ :

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Omega^1 & \Omega^2 & \Omega^{-1} \\ 1 & \Omega^2 & \Omega^4 & \Omega^{-2} \\ 1 & \Omega^{-1} & \Omega^{-2} & \Omega^1 \end{bmatrix}$$

Gráficamente podemos ver los diferentes valores de  $\Omega^{nk}$ :



Algo que es evidente también es la periodicidad de la función, lo que hace que  $\Omega^{-1} = \Omega^{4-2} = \Omega^2$  y  $\Omega^{-1} = \Omega^{4-1} = \Omega^3$ . Para fines prácticos, se opta por expresarlo en la potencial con valor absoluto mínimo. Si sustituimos los valores de  $\Omega = e^{-i2\pi/N}$  tenemos:

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/4} & e^{-i4\pi/4} & \Omega^{i2\pi/4} \\ 1 & \Omega^{-i4\pi/4} & \Omega^{-i8\pi/4} & \Omega^{i4\pi/4} \\ 1 & \Omega^{i2\pi/4} & \Omega^{i4\pi/4} & \Omega^{-i2\pi/4} \end{bmatrix}$$

Podemos después obtener los valores concretos a través de la representación gráfica o haciendo los cálculos. Al final, obtenemos:

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Esta representación es bastante útil para programarla numéricamente. Además, su verdadera utilidad vendrá cuando busquemos aplicar la Transformada de Fourier Cuántica (QFT).



## Capítulo 3

# Computación Cuántica

### 3.1. Introducción a la Computación Cuántica

La computación clásica funciona a base de **bits**, que son valores binarios: 0 o 1, sí o no, presencia o ausencia, etc. Podemos representarlos como círculos puntados de negro (0) o blanco (1):



Lo útil de los bits es la facilidad de representarlos a través de la electrónica. Un 0 puede significar la ausencia de señal mientras que el 1 la presencia de la misma, y a través de solamente estos dos números se pueden armar todo tipo de instrucciones específicas. Es un sistema muy simple y poderoso, útil para muchos fines. Sin embargo, hay un área en la que deja que desear: análisis de múltiples estados. En general, los problemas de combinatoria o donde tenemos muchas posibilidades que explorar, son costosos computacionalmente porque, si bien podemos representar por medio del sistema binario todos los estados posibles, tenemos que analizarlos uno por uno, y esto crece exponencialmente. Supongamos que tenemos 2 bits tenemos entonces 4 formas de acomodarlos:



Si tenemos 3 bits, ahora existen 7 formas:



En general, para  $n$  bits, tendremos un total de  $2^n$  formas de acomodarlos. Este es un crecimiento exponencial, y llegará un punto en que la computadora no pueda mantenerse parejo con estos cálculos. El poder de la computación cuántica radica en la posibilidad de analizar múltiples estados simultáneamente, gracias a la superposición. En vez de tener únicamente estados puros, podemos tener estados que se expresan como una combinación de los estados 0 y 1, obteniendo estados en diferentes escalas de grises, en vez de solo blanco y negro:



En computación clásica, cada uno de estos círculos representa un bit, que puede ser 0 o 1. En computación cuántica, trabajamos con **qubits**, y estos son representados por medio de estos círculos con escalas de grises. El gris se forma con una mezcla de negro y blanco, por lo que tiene 2 grados de libertad. Entonces, podemos representar el **estado** de un qubit por medio de un vector 2-D. Específicamente, por vectores complejos, a los que llamamos **bras** y **kets** (ver Notación Bra-Ket en Apéndice Números Complejos). En dos dimensiones, tenemos los **kets** dados como vectores columna de  $2 \times 1$ :

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$$

Mientras que los **bras** son vectores renglón de  $1 \times 2$ :

$$\langle\psi| = [\psi_0^* \quad \psi_1^*]$$

El producto interno está dado como la multiplicación matricial de un bra con un ket, que en notación de Dirac se simplifica como:

$$\langle\psi|\phi\rangle = [\psi_0^* \quad \psi_1^*] \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = \psi_0^* \phi_0 + \psi_1^* \phi_1$$

En este caso, tenemos la base como  $\hat{e}_1 = |0\rangle$  y  $\hat{e}_2 = |1\rangle$ , i.e. el estado puro de un qubit en 0 y en 1. Podemos representar entonces cualquier estado  $|\psi\rangle$  de un ket en la base de  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ :

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

Sin embargo, los estados deben estar normalizados:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Pero también:

$$\langle\psi|\psi\rangle = (c_0^* \langle 0| + c_1^* \langle 1|)(c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)$$

Y por la ortonormalidad de los estados:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |c_0|^2 + |c_1|^2$$

Donde  $c_j = \langle j|\psi\rangle$  son las proyecciones de la base  $|j\rangle$  sobre  $|\psi\rangle$ . Ahora, si bien tenemos un estado cuántico de los qubits, por los postulados de la mecánica cuántica, al momento de nosotros tomar una **medición**, el estado colapsará a uno de los dos posibles estados clásicos, 0 y 1, por medio de un proceso aleatorio. Cada estado tendrá una probabilidad de aparecer asociada como  $P(0) = |c_0|^2$  y  $P(1) = |c_1|^2$ .

## 3.2. Compuertas Cuánticas

Al final del día, la computación cuántica se trata de hacer **circuitos**. En el ámbito clásico, tenemos compuertas lógicas, como el AND, OR o el NOR. Veremos primero las compuertas de un solo bit, o en nuestro caso de un solo

qubit. En el caso clásico tenemos por ejemplo la compuerta NOT, definida como:

$$\text{NOT}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

En cuántica también tenemos compuertas para un solo qubit, y éstas siguen diferentes reglas o restricciones. Recordemos que en cuántica trabajamos con kets para representar estados. Esperaríamos que al aplicar una compuerta nos regresa nuevamente un estado cuántico, i.e. un ket, por lo que es conveniente pensar en las compuertas cuánticas como operadores matriciales  $\hat{U}$ :

$$\hat{U} |\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

y se muestran a continuación [4]. Si tenemos una compuerta cuántica  $\hat{U}$  actuando sobre un ket  $|\psi\rangle$ , que hemos establecido está en una base 2-D, tenemos que el operador  $\hat{U}$  será una matriz de  $2 \times 2$ :

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$$

Podemos expresar esta matriz en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Consideremos el producto externo:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) & (1)(0) \\ (0)(1) & (0)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y lo mismo para las demás bases:

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos expresar la matriz  $\hat{U}$  como:

$$\hat{U} = u_{00} |0\rangle\langle 0| + u_{01} |0\rangle\langle 1| + u_{10} |1\rangle\langle 0| + u_{11} |1\rangle\langle 1| = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 u_{mn} |m\rangle\langle n|$$

Podemos definir compuertas en concreto, como la  $\hat{\sigma}_x$ :

$$\hat{\sigma}_x := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \quad (3.2.1)$$

Al expresar la matriz como una combinatoria de estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  se hace más sencillo calcular el efecto que tiene sobre un estado  $|\psi\rangle$ , debido a las propiedades de la base ortonormal. Por ejemplo, si le aplicamos esta compuerta a  $|0\rangle$ , tenemos:

$$\hat{\sigma}_x |0\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) |0\rangle = |0\rangle \underbrace{\langle 1|0\rangle}_0 + |1\rangle \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 = |1\rangle$$

Y si se la aplicamos a  $|1\rangle$ :

$$\hat{\sigma}_x |1\rangle = (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) |1\rangle = |0\rangle \underbrace{\langle 1|1\rangle}_1 + |1\rangle \underbrace{\langle 0|1\rangle}_0 = |0\rangle$$

Si vemos esto como una función:

$$\hat{\sigma}_x |k\rangle = \begin{cases} |1\rangle, & k = 0 \\ |0\rangle, & k = 1 \end{cases}$$

En circuito se vería así:



A la izquierda tenemos el estado de entrada y a la derecha el estado de salida. Podemos ver que la compuerta  $\hat{\sigma}_x$  es equivalente a la compuerta NOT de la computación clásica. Para que una matriz  $\hat{U}$  se pueda considerar una compuerta cuántica debe ser una matriz unitaria, i.e. debe cumplir:

$$U^\dagger U = \mathbb{I}$$

Se puede comprobar esto rápidamente para la compuerta  $\hat{\sigma}_x$ :

$$\hat{\sigma}_x^\dagger \hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(0) + (1)(1) & (0)(1) + (1)(0) \\ (1)(0) + (0)(1) & (1)(1) + (0)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

### 3.3. Estados de múltiples qubits

Cuando tenemos múltiples qubits en los estados  $|m\rangle$  y  $|n\rangle$ , podemos representar el estado del sistema con un producto tensorial (ver en Apéndice Producto Tensorial) de los estados individuales:

$$|m\rangle \otimes |n\rangle = \begin{bmatrix} m_0 n_0 \\ m_0 n_1 \\ m_1 n_0 \\ m_1 n_1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si tenemos un qubit en el estado  $|1\rangle$  y otro en el estado  $|0\rangle$ :

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A este estado se le conoce también como  $|10\rangle$ :

$$|10\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \tag{3.3.1}$$

En representación binaria. Y esta convención es muy útil, porque representa el número en sistema binario que estamos representando. Por ejemplo, en nuestro caso tenemos que  $(10)_2 = 2$ , y vemos claramente que en el vector columna resultante, tenemos un 1 en la 3ra fila, que es la segunda si empezamos a contar del 0. Se cumple entonces para los cuatro estados:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Básicamente es un contador binario. A cada uno de estos estados se le asigna un nombre como el número binario al que corresponde. Podemos también asignarles como nombre el número en sistema decimal:

$$|0\rangle_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |2\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |3\rangle_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se le puede dar cualquiera de los dos nombres, según sea conveniente. Para fines de este libro utilizaremos la convención de poner un subíndice  $\nu$  en  $|k\rangle_\nu$ , que nos indica la cantidad de bits que hay, en caso de utilizar la representación decimal. Definimos la representación binaria de un entero en el sistema decimal  $k$  como:

$$k = (k_1 k_2 \dots k_\nu)_2 = k_1 2^{\nu-1} + k_2 2^{\nu-2} + \dots + k_\nu 2^0 = \sum_{\ell=1}^{\nu} k_\ell 2^{\nu-\ell} \quad (3.3.2)$$

Esto hace que el estado  $|k\rangle_\nu$  sea representado como:

$$|k\rangle_\nu = |k_1 k_2 \dots k_\nu\rangle = |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \dots \otimes |k_\nu\rangle = \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |k_\ell\rangle \quad (3.3.3)$$

Pasando a producto tensorial como en (3.3.1). Entonces, tenemos que para un estado de dos qubits,  $\nu = 4$ , los kets son de dimensión  $4 \times 1$  (por el producto tensorial), lo que sugiere que los operadores sobre estados de dos qubits sean matrices de  $4 \times 4$ . Un ejemplo de esto es la compuerta CNOT:

$$\text{CNOT} := \begin{matrix} & \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = |00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 10| \quad (3.3.4)$$

O también, en representación decimal:

$$\text{CNOT} = |0\rangle \langle 0|_2 + |1\rangle \langle 1|_2 + |2\rangle \langle 2|_2 + |3\rangle \langle 3|_2$$

La compuerta CNOT (Controlled NOT, negación controlada) voltea el qubit de la derecha si el qubit de la izquierda está en el estado  $|1\rangle$ , es equivalente a la compuerta XOR en computación clásica. Se puede verificar esto aplicando la compuerta a todos los posibles estados para un qubit de control  $|x\rangle$  (izquierda) y un qubit objetivo  $|y\rangle$  (derecha) y con esto armando una tabla:

$$\begin{aligned} \text{CNOT}|00\rangle_{xy} &= |00\rangle_{xy} \underbrace{\langle 00|00\rangle_{xy}}_1 + |01\rangle_{xy} \underbrace{\langle 01|00\rangle_{xy}}_0 + |10\rangle_{xy} \underbrace{\langle 11|00\rangle_{xy}}_0 + |11\rangle_{xy} \underbrace{\langle 10|00\rangle_{xy}}_0 = |00\rangle_{xy} \\ \text{CNOT}|01\rangle_{xy} &= |00\rangle_{xy} \underbrace{\langle 00|01\rangle_{xy}}_0 + |01\rangle_{xy} \underbrace{\langle 01|01\rangle_{xy}}_1 + |10\rangle_{xy} \underbrace{\langle 11|01\rangle_{xy}}_0 + |11\rangle_{xy} \underbrace{\langle 10|01\rangle_{xy}}_0 = |01\rangle_{xy} \\ \text{CNOT}|10\rangle_{xy} &= |00\rangle_{xy} \underbrace{\langle 00|10\rangle_{xy}}_0 + |01\rangle_{xy} \underbrace{\langle 01|10\rangle_{xy}}_0 + |10\rangle_{xy} \underbrace{\langle 11|10\rangle_{xy}}_0 + |11\rangle_{xy} \underbrace{\langle 10|10\rangle_{xy}}_1 = |11\rangle_{xy} \\ \text{CNOT}|11\rangle_{xy} &= |00\rangle_{xy} \underbrace{\langle 00|11\rangle_{xy}}_0 + |01\rangle_{xy} \underbrace{\langle 01|11\rangle_{xy}}_0 + |10\rangle_{xy} \underbrace{\langle 11|11\rangle_{xy}}_1 + |11\rangle_{xy} \underbrace{\langle 10|11\rangle_{xy}}_0 = |10\rangle_{xy} \end{aligned}$$

Aquí el subíndice  $xy$  indica que estamos en la base de  $x$  y  $y$ , i.e. los nombres de cada bit (el de la izquierda es  $x$  y el de la derecha es  $y$ ). Por ejemplo, el estado  $|01\rangle_{xy}$  representa que  $|x\rangle = |0\rangle$  y  $|y\rangle = |1\rangle$ . A partir de esto podemos hacer una tabla:

input	output
$xy$	$x \quad \text{CNOT}(x, y)$
00	00
01	01
10	11
11	10

Podemos simplificar esta operación utilizando el operador:

$$\oplus : \quad x \oplus y = x + y \pmod{2}$$

Se puede verificar que este operador sigue la siguiente tabla:

input	output
$xy$	$x \quad x \oplus y$
00	00
01	01
10	11
11	10

Entonces, podemos definir la compuerta CNOT como:

$$\text{CNOT}(x, y) \mapsto (x, x \oplus y)$$

Recibimos el ket  $|x\rangle$  tal como lo mandamos y el  $|y\rangle$  se voltea cuando  $|x\rangle = |1\rangle$ . Existen más compuertas de 2 qubits, pero están fuera del alcance de este libro.

### 3.4. Transformada Cuántica de Fourier

La **Transformada Cuántica de Fourier** (QFT) se puede definir de igual manera que se define la DFT, pero con bras y kets en vez de vectores. Tenemos entonces el ket  $|k\rangle$ , en el espacio temporal, y lo queremos pasar al ket  $|\tilde{n}\rangle$ , en el espacio de frecuencias, con  $k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , con  $N = 2^\nu$  donde  $\nu$  es el número de qubits. Podríamos reemplazar  $f_k = |k\rangle_\nu$  y  $F(\omega_n) = |\tilde{n}\rangle_\nu$  en (2.7.4), pero no estaría normalizado. Recordemos que tenemos también la DFT normalizada definida en (2.7.5), tendríamos para la QFT:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle_\nu e^{-2\pi nk/N} \quad (3.4.1)$$

Nótese que la expresión es exactamente igual, la única diferencia es que ahora tenemos kets en vez de vectores. Como los coeficientes exponenciales son iguales que en la DFT, podemos utilizar la matriz de la DFT (2.8.2)  $\mathbf{W}$  y multiplicar por el ket  $|k\rangle_\nu$ . Solo faltaría agregar la constante de normalización:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{W}_N |k\rangle_\nu$$

En representación matricial por (2.8.3):

$$\begin{bmatrix} \tilde{n}_0 \\ \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \vdots \\ \tilde{n}_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \Omega_N^1 & \Omega_N^2 & \dots & \Omega_N^{-1} \\ 1 & \Omega_N^2 & \Omega_N^4 & \dots & \Omega_N^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \Omega_N^{-1} & \Omega_N^{-2} & \dots & \Omega_N^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

Con  $k_j = \langle k|j\rangle$  y  $\tilde{n}_j = \langle \tilde{n}|j\rangle$ . Podemos ir más allá y escribir la matriz como descomposición en productos externos ket-bra:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \Omega^{n \cdot k} |\tilde{n}\rangle \langle k|_\nu \quad (3.4.3)$$

Esto implica la existencia de un operador de Fourier, y por tanto una compuerta que pueda aplicar la QFT, i.e. un circuito cuántico. Para encontrarlo tendremos que recorrer toda una travesía con productos tensoriales, que veremos a continuación.

### 3.5. Transformada Cuántica de Fourier: Versión Tensorial

Supongamos que tenemos un estado arbitrario  $|\Psi\rangle$ , compuesto de  $\nu$  qubits. Por el producto tensorial, tenemos que este ket vive en un espacio de dimensión  $2^\nu \times 1$ . Tenemos que podemos representar el estado  $|\Psi\rangle$  en la base  $\{|0\rangle_\nu, |1\rangle_\nu, \dots, |N-1\rangle_\nu\}$  como una suma de las proyecciones  $x_k \equiv \langle\Psi|k\rangle_\nu$  del estado sobre cada base:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k |k\rangle_\nu$$

Pues bien, podemos representar este estado también en la base de Fourier  $\{|\tilde{0}\rangle_\nu, |\tilde{1}\rangle_\nu, \dots, |\widetilde{N-1}\rangle_\nu\}$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} y_n |\tilde{n}\rangle_\nu$$

Con  $y_n \equiv \langle\Psi|\tilde{n}\rangle_\nu$ . Pero ahora, ¿cómo se ve esta base? Regresemos a la representación de sumas en (3.4.1), considerando  $N = 2^\nu$ :

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k=0}^{2^\nu-1} |k\rangle_\nu e^{-i2\pi nk/(2^\nu)}$$

Recordemos por (3.3.3) que podemos representar el ket base  $|k\rangle_\nu$  como un producto tensorial de los  $\nu$  qubits base. Además, por (3.3.2) podemos expresar  $k$  como una suma de sus componentes binarias. Entonces, podríamos expresar la suma sobre  $k$  como una suma sobre todos los posibles valores de los  $k_\ell$ :

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_\nu=0}^1 e^{-i2\pi n \cdot 2^{-\nu} \cdot \sum_{\ell=1}^{\nu} k_\ell 2^{\nu-\ell}} |k_1 k_2 \dots k_\nu\rangle$$

Expresemos el exponente con mayor claridad:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_\nu=0}^1 \exp\left(-i2\pi n \cdot 2^{-\nu} \cdot \sum_{\ell=1}^{\nu} k_\ell 2^{\nu-\ell}\right) \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |k_\ell\rangle$$

Podemos meter el  $2^{-\nu}$  a la suma:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_\nu=0}^1 \exp\left(-i2\pi n \cdot \sum_{\ell=1}^{\nu} k_\ell 2^{\nu-\ell} \cdot 2^{-\nu}\right) \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |k_\ell\rangle$$

Simplificamos el exponente del 2:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_\nu=0}^1 \exp\left(-i2\pi n \cdot \sum_{\ell=1}^{\nu} k_\ell 2^{-\ell}\right) \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |k_\ell\rangle$$

Metemos todo a la suma:

$$|\tilde{n}\rangle_\nu = \frac{1}{2^{\nu/2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_\nu=0}^1 \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\nu} -i2\pi n k_\ell 2^{-\ell}\right) \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |k_\ell\rangle$$





Pues son vueltas enteras al círculo, como veíamos en el diagrama de la página 58. Por lo que todos estos términos se convierten a 1, lo que hace que no aporten nada a la productoria. En cambio, para los términos con  $\nu < \mu + \ell$ , tenemos que  $2^{\nu-(\mu+\ell)}$  da una fracción, por lo que ya no tendríamos una vuelta completa al círculo, y la exponencial ya no se va a 1. Entonces, los únicos términos de la multiplicatoria que aportan algo en realidad son los que cumplen:

$$\mu + \ell > \nu$$

Despejando para  $\mu$ :

$$\mu > \nu - \ell$$

Dado que estamos restringidos a números enteros, se cumple:

$$\mu \geq \nu - \ell + 1$$

Y tenemos entonces que la productoria va desde este valor mínimo hasta  $\nu$ :

$$\bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |\tilde{n}_{\ell}\rangle = \frac{1}{2^{\nu/2}} \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu=\nu-\ell+1}^{\nu} \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu} 2^{\nu-(\mu+\ell)}\right) \right] |1\rangle \right\}$$

Si cambiamos de índice a  $\mu' = \mu - \nu + \ell$ , los límites cambiarían:

$$\mu = \nu - \ell + 1 \rightarrow \mu' + \nu - \ell = \nu - \ell + 1 \Rightarrow \mu' = 1$$

$$\mu = \nu \rightarrow \mu' + \nu - \ell = \nu \Rightarrow \mu' = \ell$$

$$\bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |\tilde{n}_{\ell}\rangle = \frac{1}{2^{\nu/2}} \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^{\ell} \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'} 2^{\nu-(\mu'+\nu-\ell+\ell)}\right) \right] |1\rangle \right\}$$

Simplificando llegamos finalmente a:

$$\bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |\tilde{n}_{\ell}\rangle = \frac{1}{2^{\nu/2}} \bigotimes_{\ell=1}^{\nu} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^{\ell} \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+\nu-\ell} 2^{-\mu'}\right) \right] |1\rangle \right\} \quad (3.5.2)$$

Si  $\ell = 1$ , tenemos que la productoria va de 1 a 1, i.e. solo aplica  $\mu' = 1$ , y tenemos solamente el término  $2^{-1}$  multiplicado por  $n_{1+\nu-1} = n_{\nu}$ . Y después para  $\ell = 2$  tendremos dos términos, para  $\ell = 3$  tres términos, y así sucesivamente. Cada vez habría que aplicar más compuertas al qubit. Notamos que la compuerta afecta únicamente a la base  $|1\rangle$  multiplicando por una exponencial, y a la base  $|0\rangle$  la deja intacta. Tiene sentido pensar en compuertas del estilo:

$$\hat{R}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi/2^k} \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

Que se le apliquen al segundo qubit. Veamos ahora varios ejemplos para diferentes números de qubits:

### 3.5.1. Ejemplo: QFT para 1 qubit

Para un qubit tenemos  $\nu = 1$ , y entonces la productoria va de  $\ell = 1$  a 1, i.e. solo existe un elemento. Sustituyendo esto en (3.5.2)

$$|\tilde{n}_1\rangle = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^1 \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+1-1} 2^{-\mu'}\right) \right] |1\rangle \right\}$$

Simplificando llegamos a:

$$|\tilde{n}_1\rangle = \frac{1}{2^{1/2}} \{ |0\rangle + \exp(-i2\pi n_1 2^{-1}) |1\rangle \}$$

Tenemos que  $n_1$  puede tomar valores 0 y 1. Veamos para cada valor, primero con 0:

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ |0\rangle + e^{-i2\pi(0)2^{-1}} |1\rangle \right\}$$

El exponente se va a 1 y nos queda:

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora probemos con 1:

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{2^{1/2}} \left[ |0\rangle + e^{-i2\pi(1)2^{-1}} |1\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |0\rangle + e^{-i\pi} |1\rangle \right]$$

El exponente ahora se va a  $-1$ , nos queda:

$$|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, podemos escribir esta transformación de  $|0\rangle, |1\rangle \rightarrow |\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle$  por medio de una matriz que nos diga a dónde se van las antiguas bases  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , i.e. una transformación:

$$QFT_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos esta matriz a cualquier estado, nos lo cambiará a la base de Fourier. A esta compuerta se le conoce también como **Compuerta de Hadamard**  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

Si tenemos un estado  $|\Psi\rangle$  con coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  en la base computacional:

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Lo podemos pasar a la base de Fourier, donde tendrá coeficientes diferentes, dados como  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  y estará definido como:

$$|\Psi\rangle = \tilde{\alpha} |\tilde{0}\rangle + \tilde{\beta} |\tilde{1}\rangle$$

Lo único que tenemos que hacer es pasarle la matriz de transformación:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{bmatrix}$$

### 3.5.2. Ejemplo: QFT para 2 qubits

Tenemos ahora  $\nu = 2$ , por lo que hay dos multiplicaciones:

$$\begin{aligned} |\tilde{n}_1 \tilde{n}_2\rangle &= \frac{1}{2^{2/2}} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^1 \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+2-1} 2^{-\mu'}\right) |1\rangle \right] \right\} \otimes \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^2 \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+2-2} 2^{-\mu'}\right) |1\rangle \right] \right\} \\ \Rightarrow |\widetilde{n_1 n_2}\rangle &= \frac{1}{2} \{ |0\rangle + \exp(-i2\pi n_{1+1} 2^{-1}) |1\rangle \} \otimes \{ |0\rangle + [\exp(-i2\pi n_1 2^{-1})] [\exp(-i2\pi n_2 2^{-2})] |1\rangle \} \\ \Rightarrow |\widetilde{n_1 n_2}\rangle &= \frac{1}{2} (|0\rangle + e^{-i\pi n_2} |1\rangle) \otimes [ |0\rangle + (e^{-i\pi n_1}) (e^{-i\pi n_2/2}) |1\rangle ] \end{aligned}$$

Ahora tenemos 4 estados diferentes:  $|\widetilde{00}\rangle$ ,  $|\widetilde{01}\rangle$ ,  $|\widetilde{10}\rangle$ ,  $|\widetilde{11}\rangle$ . Para  $|\widetilde{00}\rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned} |\widetilde{00}\rangle &= \frac{1}{2} \left( |0\rangle + \cancel{e^{-i\pi(0)}} |1\rangle \right) \otimes \left[ |0\rangle + \left( \cancel{e^{-i\pi(0)}} \right)^1 \left( \cancel{e^{-i\pi(1)/2}} \right)^1 |1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

Para  $|\widetilde{01}\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\widetilde{01}\rangle &= \frac{1}{2} \left( |0\rangle + e^{-i\pi(1)} |1\rangle \right) \otimes \left[ |0\rangle + \left( \cancel{e^{-i\pi(0)}} \right)^1 \left( \cancel{e^{-i\pi(1)/2}} \right)^1 |1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes [|0\rangle - i|1\rangle] \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle - i|01\rangle - |10\rangle + i|11\rangle) \end{aligned}$$

Para  $|\widetilde{10}\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\widetilde{10}\rangle &= \frac{1}{2} \left( |0\rangle + \cancel{e^{-i\pi(0)}} |1\rangle \right) \otimes \left[ |0\rangle + \left( \cancel{e^{-i\pi(1)}} \right)^{-1} \left( \cancel{e^{-i\pi(0)/2}} \right)^1 |1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes [|0\rangle - |1\rangle] \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \end{aligned}$$



### 3.6. Transformada Cuántica de Fourier: Circuito Cuántico

Ya con los ejemplos vistos y con la fórmula derivada en (3.5.2), podemos ver cómo aplicarlo a un circuito. De entrada, tenemos para un  $\nu$  arbitrario, una cantidad  $\nu$  de productos tensoriales, y en cada uno se le aplican matrices de rotación  $\hat{R}_k$  como se define en (3.5.3), según el qubit en el que estemos operando, de aquí la importancia de haberlos dividido por índice  $\ell$ . Para armar el circuito, necesitamos  $\nu$  qubits, que tendrán un estado inicial  $|\Psi_0\rangle = |n_1 n_2 \dots n_\nu\rangle$ . Para cada  $n_\ell$ , tenemos dos posibles valores: 0 y 1. Nuestro circuito debe funcionar para cualquier estado inicial  $|\Psi_0\rangle$  combinación de estos posibles valores. Lo más recomendable es empezar armando el estado final objetivo, i.e. la QFT, trabajando con un qubit a la vez. Empezamos aplicando compuertas sobre el qubit  $n_1$ , donde la productoria de los exponentes se aniquila y nos deja un solo término para  $\mu'$ . Podemos sacar este primer valor de la productoria:

$$\bigotimes_{\ell=1}^{\nu} |\tilde{n}_\ell\rangle = \frac{1}{2^{\nu/2}} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^1 \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+\nu-\ell} 2^{-\mu'}\right) \right] |1\rangle \right\} \otimes \bigotimes_{\ell=2}^{\nu} \left\{ |0\rangle + \prod_{\mu'=1}^{\ell} \left[ \exp\left(-i2\pi n_{\mu'+\nu-\ell} 2^{-\mu'}\right) \right] |1\rangle \right\}$$

Pero esto es equivalente a la QFT en un solo bit, y dijimos que está dada por una compuerta de Hadamard. Si aplicamos esta compuerta a nuestro estado inicial  $|n_1 n_2 \dots n_\nu\rangle$ , nos pone en el estado siguiente [4]:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2^{\nu/2}} \left[ |0\rangle + e^{-i2\pi n_\nu 2^{-1}} |1\rangle \right] \otimes |n_2 n_3 \dots n_\nu\rangle$$

Nótese que, a pesar de que le aplicamos esta compuerta al bit  $n_1$ , depende del bit  $n_\nu$ . Para armar este tipo de conexiones, tendríamos que hacer mucho intercableado. Sale mejor voltear los estados, i.e. aplicarle esto a  $n_\nu$  en vez de  $n_1$ , y al final simplemente hacerles un swap. Da manera que sobre el qubit  $n_1$  intentamos armar el estado que en realidad le corresponde al  $n_\nu$  en nuestra expresión. Cuando  $\ell = \nu$ , tenemos el número máximo de términos en la multiplicatoria. Sin embargo, podemos notar que, como la suma está delimitada por  $\ell$ , siempre llegaremos a un término con  $\mu' = \ell$ , y por tanto siempre tendremos un término en la productoria que depende de  $n_\nu$ . Además, siempre comenzamos con  $\mu' = 1$ , por lo que el término base, donde tenemos  $e^{-2\pi n_\nu 2^{-1}}$  siempre está presente. Este estado se alcanza, como ya vimos, con una compuerta de Hadamard. Si sobre este estado vamos agregando compuertas que afecten únicamente a la base  $|1\rangle$ , como es el caso de la compuerta rotacional (3.5.3), podemos ir armando todos los estados necesarios. Aplicamos tantas compuertas rotacionales como tengamos términos en la multiplicatoria. Sin embargo, el detalle es que la rotación no depende únicamente de  $\mu'$ , el término que recorre la integral, sino también del valor del qubit  $n_{\mu'+\nu-\ell}$ . Es decir, tenemos un acoplamiento, y necesitamos una compuerta que actúe sobre estos dos qubits,  $n_\ell$  y  $n_{\mu'+\nu-\ell}$ . Queremos que la compuerta solo afecte a  $n_\ell$  y a  $n_{\mu'+\nu-\ell}$  lo deje intacto, pero que sí tome en cuenta su valor, i.e. tenemos un qubit de control y uno objetivo. Podemos armar entonces un operador CROT:

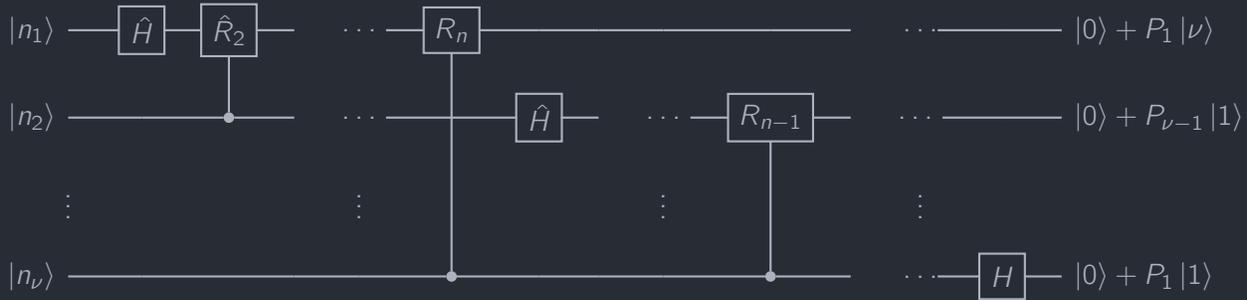
$$\text{CROT}_k = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i2\pi/2^k} \end{bmatrix} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + e^{-i2\pi/2^k} |11\rangle\langle 11|$$

Si estamos en el estado  $|00\rangle$ , nos da 1, esto tiene sentido porque si ambos  $n_\ell$  y  $n_{\mu'+\nu-\ell}$  son 0, el exponente nos da 0 en (3.5.2). Y lo mismo para los estados  $|01\rangle$  y  $|10\rangle$ , donde al menos uno de los dos es 0. Sin embargo, cuando

ambos son 1, tenemos simplemente el exponente  $e^{-i2\pi/2^{-\mu'}}$ , y esto es lo que obtenemos con la matriz. En un circuito, escribimos esta compuerta de la siguiente manera:



Si tenemos  $\nu$  términos de la multiplicatoria, tendríamos un total de  $\nu$  de estas compuertas. Como tenemos para un qubit  $\ell$  constante y  $\mu'$  va creciendo, tendremos conexiones con los qubits de más arriba. Por ejemplo, cuando  $\mu' = 1$ , para  $\ell = \nu$ , tenemos conexión con el qubit  $n_1$ , para  $\mu' = 2$  con el qubit  $n_2$ , y así sucesivamente. Para el siguiente qubit tendremos solo  $\nu - 1$  términos, y para el siguiente  $\nu - 2$ , y así hasta llegar a el qubit con un sólo término en la productoria. Armando el circuito, se vería así:



Donde

$$P_\ell = \prod_{\mu'=1}^{\ell} \left[ \exp \left( -i2\pi n_{\mu'+\nu-\ell} 2^{-\mu'} \right) \right]$$

Es a productoria de exponenciales, resultado de aplicar las compuertas  $\hat{R}_k$ . Pareciera que empezamos con  $\hat{R}_2$  y que nos brincamos  $\hat{R}_1$ , pero en realidad,  $\hat{R}_1 = \hat{H}$ . Este es el circuito que implementa la QFT, para un número arbitrario de qubits  $\nu$ .

## 3.7. Algoritmo de Shor

El algoritmo de Shor, en su versión más general, sirve para encontrar el periodo de una función. Sin embargo, se puede aplicar para reducir el problema de factorizar un número a un problema de encontrar un orden de exponente que tiene una cierta periodicidad. Tenemos en aritmética modular que solo podemos tener números del 0 a  $m - 1$ , donde  $m$  es el módulo sobre el cual trabajamos. El número  $m$  vuelve a ser 0, y  $m + 1$  se va a 1, y así sucesivamente. En otras palabras, tenemos también un periodo, tenemos frecuencias, aunque de manera abstracta. Se puede aplicar el algoritmo de Shor, junto con la QFT, para encontrar este patrón y hallar un divisor no trivial de un número  $N$ . El algoritmo tiene dos partes, una clásica y una cuántica. [6]

### 3.7.1. Algoritmo de Shor: parte clásica

1. Escoger un número (pseudo-)aleatorio  $a < N$ .
2. Calcular  $\text{MCD}(a, N)$ , se puede utilizar el algoritmo de Euclides
3. Si  $\text{MCD}(a, N) \neq 1$ , tenemos que  $a$  es un divisor no trivial de  $N$ , y acabamos
4. Si  $\text{MCD}(a, N) = 1$ , se utiliza el algoritmo cuántico para estimar la fase/periodo  $r$  de la función

$$f(x) = a^x \pmod{N}$$

5. Si  $r$  es impar, volvemos al paso 1
6. Si se cumple la ecuación

$$a \cdot \frac{r}{2} \equiv -1 \pmod{N}$$

regresamos al paso 1

7. Si llegamos hasta aquí, significa que los factores de  $N$  están dados por

$$\text{MCD}\left(\frac{ar}{2} \pm 1, N\right)$$

Y hemos terminado

### 3.7.2. Algoritmo de Shor: parte cuántica

1. Tenemos un total de  $\nu$  qubits, con  $N = 2^\nu$ . Los acomodamos en el estado inicial

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle$$

2. Aplicamos la función  $f(x)$  de manera cuántica al estado, obteniendo:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) |x\rangle$$

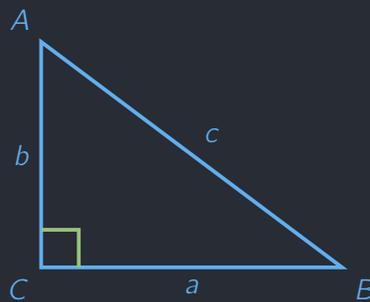


## Apéndice A

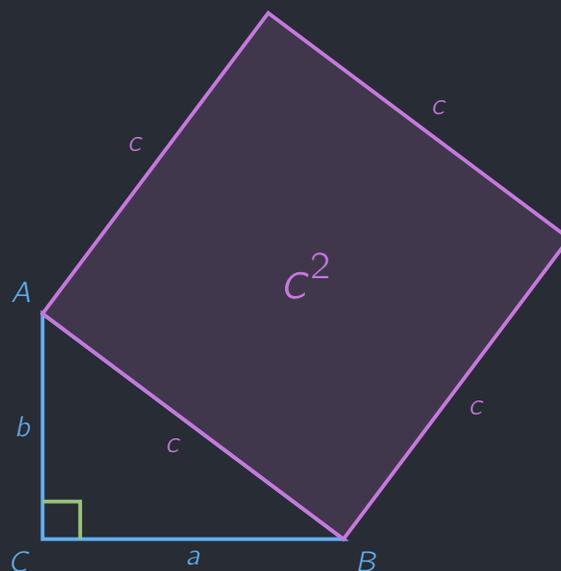
# Trigonometría

### A.1. Pitágoras

Todo se remonta al viejo Teorema de Pitágoras, que nos provee una relación entre los catetos (lados) de un triángulo rectángulo y su hipotenusa. Si tenemos un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ , i.e. con vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  opuestos a sus respectivos vértices, como se muestra a continuación:



Si creamos un cuadrado sobre la hipotenusa  $c$  obtenemos:

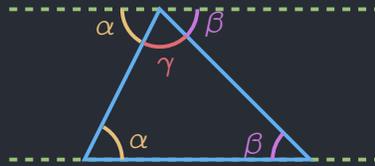


Podemos después reflejar el triángulo en cada uno de los lados del cuadrado, rotándolo  $90^\circ$  a la izquierda cada vez:



## A.2. Funciones Trigonométricas

Gracias al Teorema de Pitágoras nos hemos dado cuenta que los triángulos rectángulos son nuestros mejores amigos en el área de la geometría. Podemos obtener más relaciones entre sus lados que solo la suma de sus cuadrados, debido a las restricciones que existen. De entrada, podemos saber que los ángulos internos del triángulo suman  $180^\circ$ , lo cual puede ser demostrado rápidamente con el siguiente diagrama:



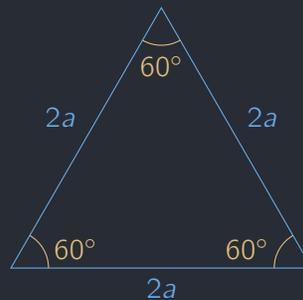
De aquí la ecuación:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (\text{A.2.1})$$

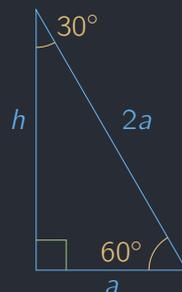
Aplicando los axiomas de líneas paralelas. En un triángulo rectángulo tenemos uno de los ángulos dados ya como  $90^\circ$ , y dado que están restringidos a que la suma total sea de  $180^\circ$ , con saber un sólo ángulo del triángulo podemos determinar todos. Por eso tiene sentido analizar los ángulos de éstos triángulos y ver cómo influyen en la figura del triángulo y en su relación con los lados. Partimos entonces del triángulo más simple: el equilátero. Ya que todos sus lados son iguales, podemos decir por simetría que sus ángulos también lo son, i.e.  $\alpha = \beta = \gamma$ . Por lo que en la ecuación de ángulos internos (A.2.1) tenemos:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Todos sus ángulos internos valen  $60^\circ$ . Escogemos que el lado valga  $\ell = 2a$ , por razones que serán evidentes más adelante:



Por simetría, podemos partir el triángulo en dos, obteniendo un triángulo rectángulo con hipotenusa  $2$ , base  $1$  y altura  $h$  desconocida. Dado que lo partimos a la mitad, podemos decir también que el ángulo superior se corta a la mitad, valiendo ahora  $30^\circ$ :





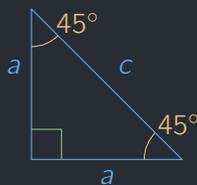
Dado que la tangente es la razón entre los lados opuesto y adyacente, que llamamos **catetos**, podemos definirla también como el seno entre el coseno. Podemos obtener estas razones para cualquier triángulo rectángulo y cualquier valor de ángulo posible de diversas maneras. Lo importante es saber que las funciones:

$$\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad \tan(\theta)$$

Están definidas para cualquier ángulo  $\theta$  interno de un triángulo rectángulo y se conocen como **funciones trigonométricas**. Podemos obtener fácilmente otro ejemplo con un triángulo rectángulo isosceles. Dado que sus dos catetos son iguales y uno de sus ángulos vale  $90^\circ$ , podemos deducir que sus dos ángulos restantes son iguales y por la ecuación de ángulos internos (A.2.1):

$$\alpha + \alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Escogemos que los catetos iguales tengan longitud  $a$ , y tenemos además la hipotenusa  $c$ :



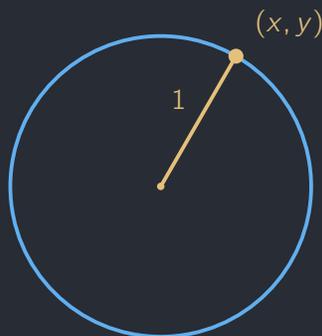
Podemos sacar la hipotenusa con Pitágoras (A.1.1):

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

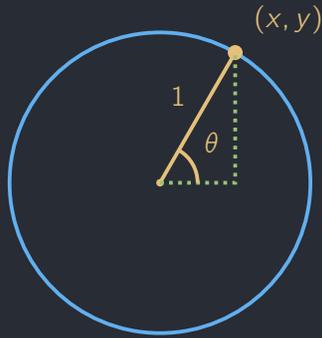
Y ahora podemos calcular las funciones trigonométricas para  $45^\circ$ :

$$\sin(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan(45^\circ) = \frac{a}{a} = 1$$

Para calcular los demás ángulos muchas veces no podemos formar un triángulo en el que tengamos valores ideales, sino que sería más con experimentos, midiendo ángulos y lados para obtener un valor numérico de las funciones trigonométricas. Otra forma de entender las funciones trigonométricas es con ayuda de un círculo unitario (de radio 1). Si escogemos un punto en el círculo podemos trazar una línea del origen al punto con coordenadas  $(x, y)$  que tendrá longitud  $r = 1$ :



Podemos trazar ahora una línea del punto al eje-x y de ahí al eje-y, y con esto formamos un triángulo con su respectivo ángulo en el vértice que está en el origen.



Como tenemos el valor de la hipotenusa, podemos saber cuánto vale el valor de cada una de las líneas que dibujamos con las funciones trigonométricas en base al ángulo  $\theta$  despejando de (A.2.2b) y (A.2.2a). Podemos decir que, dentro

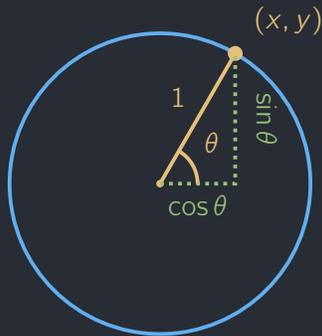


Figura A.1: Funciones trigonométricas en un círculo

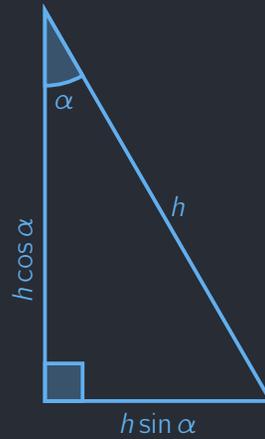
de un círculo unitario, las coordenadas  $(x, y)$  se pueden interpretar también en función de un ángulo, i.e.  $x = \cos \theta$  y  $y = \sin \theta$ , lo que lleva a las llamadas coordenadas polares:

$$(x, y) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

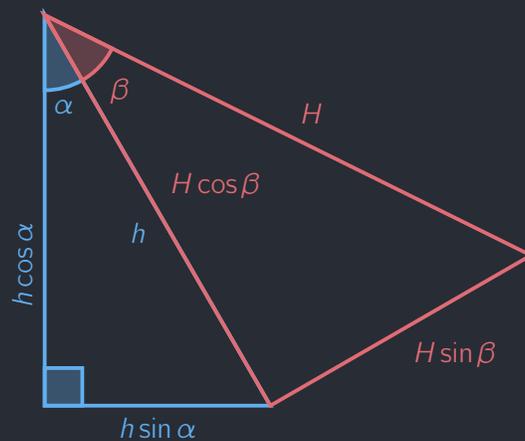
Pero, ¿todo esto de qué nos sirve? En computación tenemos los llamados bits, que pueden ser 0 o 1, mientras que en computación cuántica tenemos **qubits**, que pueden ser una combinación de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Nótese que ya no los escribimos como 0 y 1, sino como **estados cuánticos**. La diferencia de éstos es que podemos estar en una mezcla de estados, i.e. en ambos a la vez. Claro que al momento de medir obtendremos un resultado concreto, ya sea 0 o 1, pero durante la etapa cuántica podemos aprovechar el fenómeno de **superposición**. Podemos ver una representación de esto dentro de un círculo, donde la coordenada en  $x$  represente la presencia del estado  $|0\rangle$  y la de  $y$  la presencia del estado  $|1\rangle$ . De tal manera que al estar en el eje vertical estamos garantizando siempre obtener un 1 y en el eje horizontal siempre obtendremos un 0. En cualquier otro punto del círculo, tendremos una probabilidad para obtener cada estado, que dependerá de qué tan grande es la componente. Por el momento, sigamos con el estudio de vectores.

### A.3. Suma y resta de ángulos

Suonamos que tenemos un triángulo rectángulo con ángulo  $\alpha$ . Por las identidades trigonométricas, podemos saber el valor de sus catetos, en términos de la hipotenusa  $h$ :



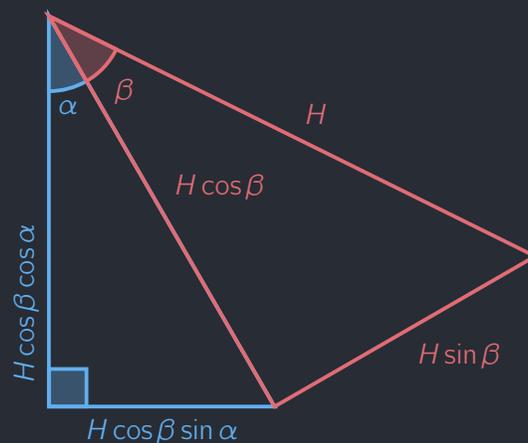
Si agregamos otro triángulo rectángulo con ángulo  $\beta$  con base en la hipotenusa del primer triángulo y con hipotenusa  $H$ , tenemos:



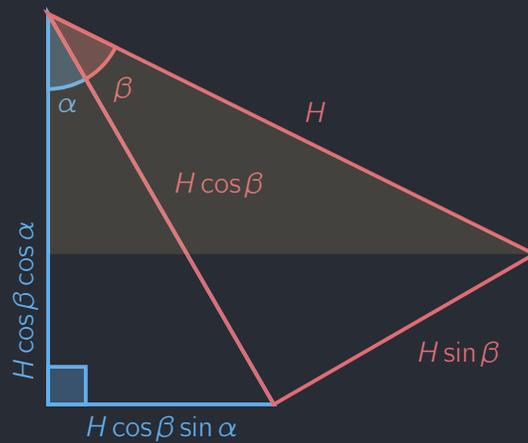
De aquí podemos ver que

$$h = H \sin \beta$$

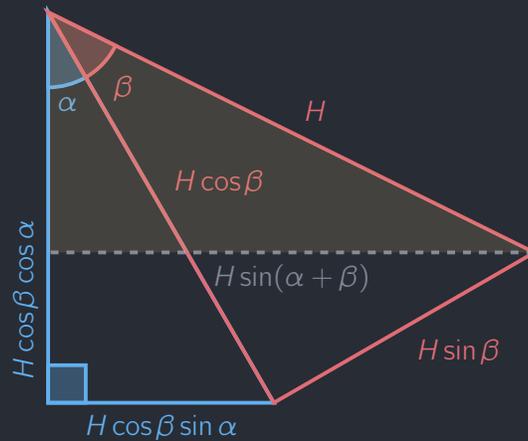
Reescribiendo los lados del triángulo azul en términos de  $H$ :



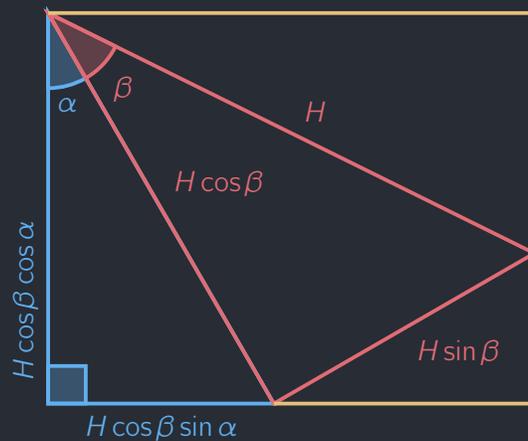
Podemos trazar una recta que una el extremo de la hipotenusa del triángulo rojo con la base del triángulo azul, creando así un triángulo rectángulo con ángulo  $\alpha + \beta$ :



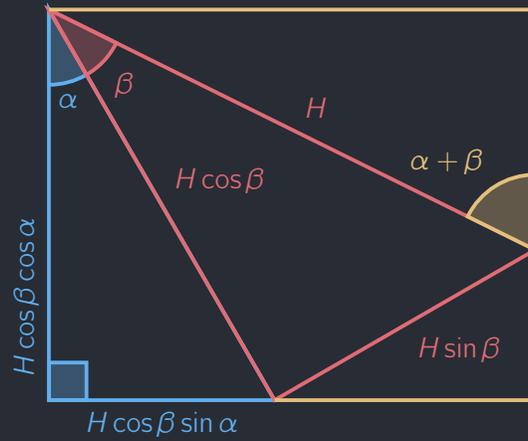
La altura de ese triángulo sería claramente  $H \sin(\alpha + \beta)$ :



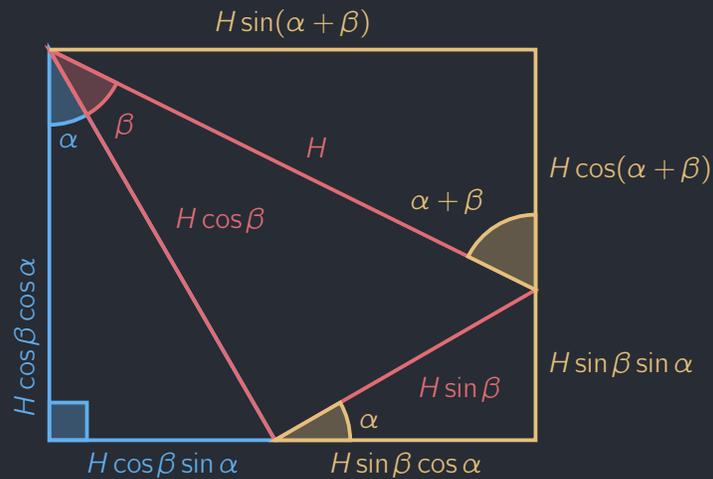
Podemos armar un rectángulo sobre los dos triángulos:



Se forman dos triángulos rectángulos nuevos, uno con hipotenusa  $H$  y otro con hipotenusa  $H \sin \beta$ . El triángulo de hipotenusa  $H$  tiene uno de sus ángulos como  $\alpha + \beta$ :



Por lo que los lados restantes del rectángulo están dados como:



De aquí podemos obtener ecuaciones igualando pares de líneas paralelas. Si igualamos las líneas horizontales [8]:

$$H \sin(\alpha + \beta) = H \cos \beta \sin \alpha + H \sin \beta \cos \alpha$$

Y dividiendo entre  $H$  llegamos a:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Si ponemos  $-\beta$ , tenemos:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

Dado que el coseno es par y el seno es impar, obtenemos:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Finalmente:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{A.3.1})$$

Por otra parte, si igualamos las líneas verticales llegamos a:

$$H \cos \beta \cos \alpha = H \cos(\alpha + \beta) + H \sin \beta \sin \alpha$$



# Apéndice B

## Cálculo

### B.1. Serie de Taylor

Si dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son iguales, se cumple la ecuación:

$$f(x) = g(x)$$

Para todo  $x$ . Es decir, si tomamos  $x = x_0$ , se cumple:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

Si tomamos una colección de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y se cumple para todos la ecuación, es muy probable que sea cierta. Si tomamos una cantidad infinita de puntos podríamos incluso probar que se cumple para todo el espacio  $x$ , suponiendo que  $x \in \mathbb{R}$ . Esta es una forma de probar que las dos funciones son iguales, tomando muchos puntos. Otra forma de probar que sean iguales sería tomar un solo punto, pero ver las diferentes derivadas. Por ejemplo, para un punto  $x = x_0$ , vemos que se cumple la igualdad:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

Entonces vemos como se comporta la derivada de las funciones en ese punto:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x_0} \stackrel{?}{=} \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x_0}$$

Si se cumple la igualdad, vemos para la segunda derivada:

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right|_{x=x_0} \stackrel{?}{=} \left. \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right|_{x=x_0}$$

Y así sucesivamente. Si las funciones son iguales, se debe cumplir para todo  $n$ :

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right|_{x=x_0}$$

Podemos ir buscando funciones similares, de manera que igualemos poco a poco las derivadas. Las funciones de prueba más sencillas con los polinomios, pues sus derivadas son las más directas de calcular. Para mayor facilidad, comencemos en el punto  $x = 0$ , entonces se debe cumplir:

$$f(0) = g(0)$$

Si  $g(x)$  es un polinomio de grado  $N$ , lo podemos representar como:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N = \sum_{n=0}^N a_nx^n \quad (\text{B.1.1})$$

Donde  $a_n$  es el coeficiente de la potencia  $n$  de  $x$ . Lo interesante es que si evaluamos el polinomio en  $x = 0$ , todos los términos que tengan  $x$  se irán a cero, dejando únicamente el  $a_0$ :

$$g(0) = a_0$$

Entonces tenemos que

$$f(0) = a_0$$

Esa sería una primera aproximación de la función. Si después queremos igualar la primera derivada tendríamos:

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=0}$$

De nuestro polinomio en (B.1.1) tenemos que la primera derivada sería:

$$\frac{d}{dx} g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + Nx^{N-1} = \sum_{n=1}^N n \cdot a_nx^{n-1}$$

Y si evaluamos en  $x = 0$ , nuevamente todos los términos que tengan  $x$  se irán a 0, y nos queda:

$$\left. \frac{d}{dx} g(x) \right|_{x=0} = a_1$$

Si repetimos para la segunda derivada tendríamos:

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) = 2a_2 + (3 \cdot 2)a_3x + (4 \cdot 3)a_4x^2 \cdots + (N)(N-1)x^{N-2} = \sum_{n=1}^N (n)(n-1) \cdot a_nx^{n-2}$$

Y evaluando en  $x = 0$ :

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} g(x) \right|_{x=0} = 2a_2$$

Y si seguimos:

$$\left. \frac{d^3}{dx^3} g(x) \right|_{x=0} = (3)(2)a_3$$

Podemos ver un patrón:

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right|_{x=0} = n! \cdot a_n$$

Donde

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Esto porque con cada derivada iremos bajando una potencia. Podemos despejar de esta ecuación para los coeficientes  $a_n$ :

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} g(x) \Big|_{x=0}$$

Y volviendo a la expresión para el polinomio (B.1.1)

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} g(x) \Big|_{x=0} \right) x^n$$

Al igual que con la igualdad en una cantidad  $n$  de puntos, si igualamos cada vez más derivadas nos acercaremos más a la función real, y en teoría serían iguales en el límite, si igualamos infinitas derivadas. Entonces tenemos para una función arbitraria  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=0} \right) x^n \quad (\text{B.1.2})$$

Podemos recorrer la una función  $x_0$  a la derecha si hacemos  $f(x - x_0)$ . Podemos entonces recorrer cada polinomio de la serie  $x_0$  a la derecha, en caso de que no queramos evaluar la función en 0, sino en otro punto cualquiera:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=x_0} \right) (x - x_0)^n \quad (\text{B.1.3})$$

La utilidad de esto es que en la práctica no podemos evaluar infinitas derivadas, y la aproximación va perdiendo precisión a medida que nos alejamos del punto donde evaluamos, que en un principio era en el origen  $x = 0$ . Si nos interesa aproximar la función en un punto lejano del origen, es conveniente empezar la aproximación en un punto más cercano. Tenemos funciones importantes que podemos expresar en la serie de Taylor. Un caso especial es la exponencial, ya que se cumple que:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

En otras palabras, su derivada siempre es sí misma:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$$

Entonces tenemos su Serie de Taylor centrada en  $x = 0$  dada por (B.1.2):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^0 x^n$$

Pero  $e^0 = 1$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (\text{B.1.4})$$

Otras funciones interesantes son el coseno y seno. En este caso se cumple también un ciclo:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx}(-\sin x) = \frac{d}{dx}(-\cos x) \quad \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

Si hacemos una serie de Taylor para el seno centrada en  $x = 0$  tendríamos:

$$\sin x = \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{6}x^3 + \frac{\sin(0)}{24}x^4 + \dots$$

Pero  $\sin(0) = 0$  y  $\cos(0) = 1$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (\text{B.1.5})$$

Tenemos únicamente los números impares de potencias, alternando entre positivo y negativo. Y para el coseno tendríamos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!} \quad (\text{B.1.6})$$

Aquí tenemos únicamente números pares de potencias. Esta es una prueba de que el seno es una función impar (únicamente potencias impares) y el coseno una función par (únicamente potencias pares). Esto se cumple para cualquier función par o impar: su serie de Taylor tendrá únicamente potencias pares o impares, dependiendo del caso. Las funciones que tienen tanto potencias pares como impares, como es el caso de la exponencial, no son ni pares ni impares.

## B.2. Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{B.2.1})$$

Donde  $f'(x)$  indica la primera derivada de la función  $f(x)$  respecto a  $x$ .

## Apéndice C

# Álgebra Matricial

### C.1. Matrices

Definimos previamente un vector como una colección de escalares:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$$

De dimensión  $m$ . Pasamos de números simples, escalares, a una colección de éstos y obtuvimos los vectores. Pues bien, si vamos un paso más allá, pasaremos de vectores simples a una colección de éstos a la que llamamos matrices:

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Se sigue utilizando la misma notación en negritas para matrices, porque un vector se puede considerar una matriz de vectores de 1 elemento (escalares), pero por lo general las matrices se escriben con mayúscula, mientras que los vectores se escriben con minúscula. Sin embargo, la notación para describir los elementos de una matriz cambia con respecto a la notación del vector. Nótese que los elementos del vector están enumerados de 1 a  $m$ , mientras que los vectores a su vez están enumerados de 1 a  $n$ . Si consideramos que cada una de las escalares de los vectores es un elemento de la matriz, podríamos decir que hay un total de  $m \times n$  elementos, y esto es lo que se conoce como **dimensión** de una matriz. Si tenemos  $n$  vectores de  $m$  elementos, la matriz se dice que es de  $m \times n$ . Lo que es más, cada elemento tiene dos índices, el elemento  $a_{ij}$  es el elemento  $i$  del vector  $j$ . Podemos presentar todos los elementos en un solo arreglo, y es a esto a lo que llamamos matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$





Así es más fácil ver qué elementos se multiplican con cuáles. Recordemos que los vectores tienen a su vez elementos  $a_{ix}$  y  $b_{yj}$ . Por lo que, en términos de los elementos de la matriz, el producto sería:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum a_{1k} b_{k1} & \sum a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum a_{1k} b_{kn} \\ \sum a_{2k} b_{k1} & \sum a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mk} b_{k1} & \sum a_{mk} b_{k2} & \dots & \sum a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix}$$

Lo que nos deja una matriz de  $m \times n$ , donde  $m$  es el número de vectores fila de la matriz  $\mathbf{A}$  y  $n$  es el número de vectores columna de la matriz  $\mathbf{B}$ . Para que el producto matricial entre estas matrices esté definido, los vectores fila de  $\mathbf{A}$  y los vectores columna de  $\mathbf{B}$  deben tener la misma cantidad de elementos,  $\ell$ . Ahora, veamos qué ocurre si  $\mathbf{A}$  tiene un solo vector fila y  $\mathbf{B}$  un solo vector columna, i.e.  $\mathbf{A} = [\mathbf{u}]$  y  $\mathbf{B} = [\mathbf{v}]$ . Esto es equivalente al producto matricial de dos vectores:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\ell \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_\ell b_\ell \quad (\text{C.3.2})$$

Es equivalente al producto punto de los dos vectores, y se le conoce también como **producto interno**. Pero para esto debe cumplirse que  $\mathbf{u}$  sea un vector fila y  $\mathbf{v}$  sea un vector columna. El caso contrario sería que la matriz  $\mathbf{A}$  tuviera  $\ell$  vectores fila de 1 elemento cada uno y que la matriz  $\mathbf{B}$  tuviera  $\ell$  vectores fila:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_\ell \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\ell b_1 & a_\ell b_2 & \dots & a_\ell b_\ell \end{bmatrix} \quad (\text{C.3.3})$$

A esto se le conoce como **producto externo**. De aquí podemos ver también que el producto matricial no es conmutativo:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

## C.4. Base ortonormal

Tenemos en  $\mathbf{A}$  los vectores fila  $\mathbf{u}_i$ , que serían los vectores base de la matriz. Por la definición del producto matricial, tenemos que

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_j^T \\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_j^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m\mathbf{u}_j^T \end{bmatrix}$$

Recordando que un producto de un vector consigo mismo transpuesto es equivalente al producto punto, pero en versión matricial. Si tenemos que los vectores forma una base ortonormal, tenemos:

$$\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j^T = \delta_{ij}$$

Entonces tenemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Donde el 1 está en la posición  $j$  de la matriz. Pero aquí viene otra pregunta, ¿cuál es la base de los vectores  $\mathbf{u}_j$ ? Si definimos una base de vectores  $m$ -dimensionales  $\hat{\mathbf{e}}_j$  como:

$$\hat{\mathbf{e}}_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{e}}_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{e}}_3^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_m^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.1})$$

De la misma manera que originalmente habíamos definido  $\hat{\mathbf{i}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\hat{\mathbf{j}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$  y  $\hat{\mathbf{k}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$  para el caso de tres dimensiones. Nótese que estamos utilizando la transpuesta de los vectores porque originalmente eran vectores fila, según la definición en (C.3.1b), pero para el producto matricial necesitamos que a la derecha esté el vector en forma de columna. Bajo esta definición de los vectores en (??) podemos definir una matriz  $\mathbf{I}$ . En esta nueva base ortonormal, tenemos:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{e}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.2})$$

Pero bien podríamos haber utilizado la transpuesta de los vectores, y es el mismo resultado:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^T & \hat{\mathbf{e}}_2^T & \hat{\mathbf{e}}_3 & \vdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.3})$$

Utilizando los vectores base de (C.4.1). Tenemos una matriz con únicamente unos en la diagonal y ceros en todas las demás celdas. Esto es lo que se conoce como la **matriz identidad**, y cumple que:

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Si tenemos ahora un vector arbitrario  $\mathbf{w}$  al que aplicarle la matriz  $\mathbf{I}$ , se cumple también la ecuación:

$$\mathbf{I}\mathbf{w} = \mathbf{w}$$

## Apéndice D

# Números Complejos

### D.1. La unidad imaginaria

La raíz  $\rho$  de un número  $n$  es la solución a la ecuación:

$$\rho^2 = n$$

Por ejemplo, para el número 4, la raíz vendría siendo 2, ya que

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Pero también podría ser  $-2$ , ya que

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

Cuando hablamos de la función de raíz cuadrada, tomamos siempre la raíz positiva. Sin embargo, hay un problema cuando buscamos la raíz de un número negativo, como  $-4$ :

$$\rho^2 = -4$$

Detrás de los números reales no hay una manera de resolverla, ya que si ponemos un signo negativo, al ponerse al cuadrado tendríamos un signo positivo. Para resolver este tipo de raíces es que se introduce la unidad imaginaria  $i$ , definida como  $i = \sqrt{-1}$ . De manera que la raíz de  $-4$  sería  $2i$ :

$$(2i)^2 = (2i)(2i) = 4(i^2) = 4(\sqrt{-1})^2 = -4$$

Es un nuevo tipo de número, y se le conoce como la **unidad imaginaria**. A partir de ésta se crean los números complejos, definidos como:

$$z = a + ib$$

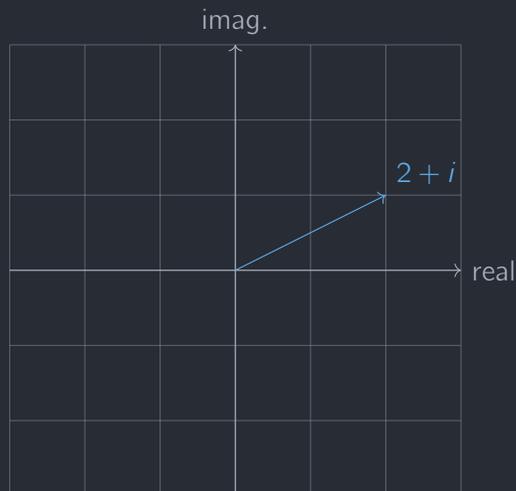
Donde  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria y  $a, b \in \mathbb{R}$  son números reales. Entonces, un número complejo se dice que tiene una parte real ( $a$ ) y una parte imaginaria ( $b$ ). Se puede definir esto por medio de los operadores  $\Re$ , parte real, y  $\Im$ , parte imaginaria:

$$z = a + ib, a, b \in \mathbb{R} \implies \Re(z) = a, \Im(z) = b \tag{D.1.1}$$

Entonces, tanto la parte real como la imaginaria de un número complejo son números reales. Esto es importante porque a veces es conveniente trabajar con números complejos, pero al final nos interesa obtener un resultado real. Entonces, poder aislar la parte real de un número complejo suele ser muy útil. Además, si separamos estas partes podemos entender un número complejo como un par ordenado de una parte real y una parte imaginaria, i.e.  $(\Re(z), \Im(z))$ , y con esto podemos representarlos en un plano cartesiano donde el eje horizontal sea la parte real (eje real) y el eje vertical sea la parte imaginaria (eje imaginario):



Entonces, un número complejo se representaría como un vector  $a\hat{i} + b\hat{j}$ . Por ejemplo, el número  $z = 2 + i$  se representaría como:



## D.2. Identidad de Euler

Si expresamos la exponencial en términos de la Serie de Taylor pero con un argumento complejo  $ix$  tenemos por (B.1.4):

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{24} + \dots$$

Dado que  $i^2 = -1$ , esto se convierte en:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Dado que las potencias pares de  $i$  nos dan números reales y las impares números imaginarios, podemos separar la exponencial en términos reales y complejos:

$$e^{ix} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!} \right) + i \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} \right) = \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right) + i \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right)$$

Notemos que la parte real tiene la forma del coseno en (B.1.6) y la parte imaginaria como seno en (B.1.5). Entonces podemos escribir:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

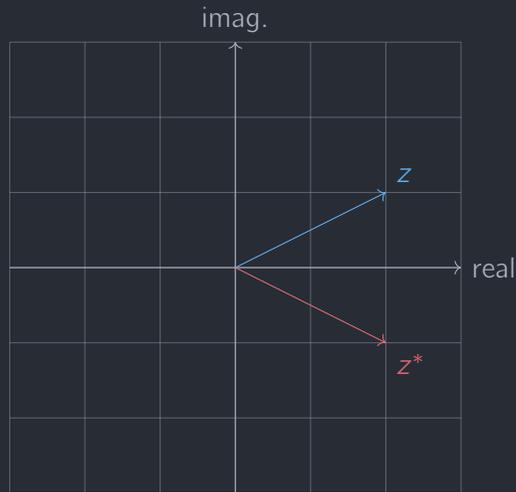
Dado que  $x$  viene siendo el argumento de funciones trigonométricas, se acostumbra utilizar una variable  $\phi$ , representando un ángulo, para expresar esta ecuación, obteniendo lo siguiente:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \tag{D.2.1}$$

Y esta es la famosa **Identidad de Euler**.

### D.3. Conjugados

El conjugado de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria de éste. Por ejemplo, si tenemos el número complejo  $z = a + ib$ , su conjugado,  $z^*$ , sería  $z = a - ib$ . Geométricamente, esto se puede ver como la reflexión de  $z$  sobre el eje real:



Ya que tenemos el mismo desplazamiento horizontal (real) pero voltemos el desplazamiento vertical (imaginario). Si vemos, el ángulo  $\phi$  del vector con la horizontal es el mismo, solo que en el caso del conjugado se va en dirección contraria, i.e. el ángulo es negativo. Entonces, en términos de la representación polar (exponencial) en (D.2.1) de la identidad de Euler, se puede escribir el conjugado de la siguiente manera:

$$(re^{i\phi})^* = re^{-i\phi} \quad (\text{D.3.1})$$

Dado que el conjugado conserva la parte real y voltea la parte imaginaria, sale la idea de expresar estas partes en términos de los conjugados. Por ejemplo, partiendo del conjugado:

$$z^* = a - ib = a + ib - i2b = z - \Im(z)$$

Despejando para  $\Im(z)$  obtenemos:

$$\Im(z) = \frac{z - z^*}{2} \quad (\text{D.3.2})$$

Análogamente, se puede ver que partiendo del negativo del conjugado:

$$-z^* = ib - a = ib + a - 2a = z - 2\Re$$

Y despejando para  $\Re(z)$  se obtiene:

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad (\text{D.3.3})$$

### D.4. Magnitud de Números Complejos

Para un número complejo  $z = a + ib$ , definimos su magnitud (norma)  $|z|$  como la magnitud del vector en el plano de su representación cartesiana:





Si hacemos el producto interno de un estado  $\psi$  consigo mismo obtenemos:

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \dots & \phi_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1^* & \phi_2\phi_1^* & \dots & \phi_n\phi_1^* \\ \phi_1\phi_2^* & \phi_2\phi_2^* & \dots & \phi_n\phi_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1\phi_n^* & \phi_2\phi_n^* & \dots & \phi_n\phi_n^* \end{bmatrix}$$

Si volvemos a la identidad de normalización pero multiplicamos a la izquierda por  $|\phi\rangle$  obtenemos:

$$|\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle = |\phi\rangle$$

El producto matricial sigue la propiedad de asociatividad, por lo que se cumple:

$$(|\phi\rangle\langle\phi|)|\phi\rangle = |\phi\rangle$$

Esto implica que  $|\phi\rangle$  es un eigenvector de la matriz  $|\phi\rangle\langle\phi|$  con eigenvalor 1. Si, en cambio, colocamos a la derecha un estado diferente  $|\psi\rangle$ , tendríamos.

$$|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle$$

Dado que se cumple la asociatividad, podemos escoger un agrupamiento diferente:

$$|\phi\rangle(\langle\phi|\psi\rangle) = |\phi\rangle(\langle\phi|\psi\rangle) \propto |\phi\rangle$$

Tenemos el producto interno  $(\langle\phi|\psi\rangle)$ , que sabemos que es un número (escalar), y por tanto el resultado de esto sería una escalar multiplicado por el ket  $|\phi\rangle$ .

$$|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle = c|\phi\rangle$$

Si nuevamente cambiamos la asociatividad, tenemos:

$$(|\phi\rangle\langle\phi|)|\psi\rangle = c|\phi\rangle$$

Si hablamos en el contexto de una base ortonormal:

$$\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |m\rangle\}$$

De manera que

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (\text{D.5.4})$$

Expresaríamos cualquier estado  $|\psi\rangle$  como:

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + \dots + c_m|m\rangle = \sum_{j=1}^m c_j|j\rangle \quad (\text{D.5.5})$$

De aquí tenemos una pista de lo que representaría la constante  $c$  en la ecuación anterior. Recordando cómo construimos la matriz identidad a partir de la base de vectores en (C.4.2) y (C.4.3), podemos construir nuestra



## Apéndice E

# Notación Tensorial

### E.1. Tensores

Los tensores son una generalización del concepto de matriz y se clasifican por órdenes. Un tensor de orden 0 es una constante, una escalar; un tensor de orden 1 es un vector; un tensor de orden 2 es una matriz; un tensor de orden 3 es una matriz de matrices; y así sucesivamente. El orden de un tensor está dado por la cantidad de índices que se requieren para describir sus elementos. Por ejemplo, para una escalar no requerimos ningún índice, mientras que para los elementos de un vector utilizamos un índice y para los de una matriz dos índices. A pesar de que los vectores sean equivalentes a estas construcciones, la manera de trabajar con ellos es un tanto diferente. Existen operaciones únicas para los tensores que veremos a continuación.

Para describir tensores se suele utilizar la convención de sumatoria de Einstein. Bajo esta convención, se sigue que un vector  $\mathbf{v}$  está descrito como  $v_i$ , mientras que una matriz  $\mathbf{A}$  está descrita como  $A_{ij}$  (dos índices, dos grados de libertad), y un tensor de tercer orden tendría todavía más índices, como  $\epsilon_{ijk}$ . La convención establece una representación del tensor a través de la representación general de uno de sus términos. Si los índices no se repiten, se dice que son **índices libres**, como en  $v_i$ , y pueden tomar valores de 1 a  $n$ , donde  $n$  es la dimensión del tensor. Sin embargo, existen también los **índices repetidos** sobre los cuales la convención nos dice debemos sumar. A través de esto podemos, por ejemplo, definir el producto punto entre dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = \sum_i u_i v_i = \langle u | v \rangle$$

Se omite la suma por simplicidad, pero está implícita en la repetición de los índices. Si, por el contrario, tuviéramos los índices diferentes, tendríamos el producto externo, dado como  $u_i v_j$ , i.e. tenemos una matriz con elementos  $A_{ij} = u_i \cdot v_j$ . Para vectores de dimensión 2:

$$u_i v_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{bmatrix} = |u\rangle \langle v|$$

## E.2. Producto Tensorial

También conocido como **Producto de Kronecker** [7], es una operación denotada por el operador  $\otimes$ , y es diferente del producto matricial. Anteriormente hablábamos del producto punto como  $u_i v_j$  y del producto externo como  $u_i v_j$ . Pues bien, el producto tensorial es casi igual al producto externo, solo que tiene diferente dimensión. El producto externo tiene dimensión  $m \times n$ , donde  $m$  es la dimensión del primer vector y  $n$  la del segundo. El producto tensorial por su parte tiene dimensión  $(m \cdot n) \times (1 \cdot 1) = mn \times 1$ , i.e. un vector de  $m \cdot n$  elementos. Por ejemplo, para dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  de dos dimensiones tendríamos:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ u_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{bmatrix}$$

Un vector de  $4 \times 1$ . Vemos si el producto tensorial es conmutativo, calculando ahora  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ :

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ v_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 u_1 \\ v_1 u_2 \\ v_2 u_1 \\ v_2 u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.1})$$

Vemos que  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ , por lo que el producto tensorial **no** es conmutativo. Para tensores matriciales tendríamos igual elemento por elemento, una constante por una matriz. Si tenemos matrices de  $2 \times 2$   $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ , tendríamos como resultado una matriz de  $4 \times 4$ , como se ve a continuación:

$$\mathbf{U} \otimes \mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} & u_{12} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ u_{21} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} & u_{22} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{U} \otimes \mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_{11} v_{11} & u_{11} v_{12} & u_{12} v_{11} & u_{12} v_{12} \\ u_{11} v_{21} & u_{11} v_{22} & u_{12} v_{21} & u_{12} v_{22} \\ u_{21} v_{11} & u_{21} v_{12} & u_{22} v_{11} & u_{22} v_{12} \\ u_{21} v_{21} & u_{21} v_{22} & u_{22} v_{21} & u_{22} v_{22} \end{bmatrix}$$

En cambio, para tensores de grado 0, i.e. escalares, el producto tensorial es como un producto normal:

$$u \otimes v = uv \quad (\text{E.2.2})$$

También podemos tener una sucesión de productos tensoriales:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \dots$$





# Bibliografía

- [1] Karl-Dieter Crisman. *Number Theory: In Context and Interactive*. 7.<sup>a</sup> ed. Gordon College, 20 de jul. de 2021. url: <https://www.math.gordon.edu/ntic/ntic/frontmatter-1.html>.
- [2] *Despicable Me*. 2010.
- [3] DSP Related. *Derivation of the Discrete Fourier Transform (DFT) | Mathematics of the DFT*. url: [https://www.dsprelated.com/freebooks/mdft/DFT\\_Derived.html](https://www.dsprelated.com/freebooks/mdft/DFT_Derived.html).
- [4] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 9 de dic. de 2010.
- [5] Physics and Math Lectures. *Deriving the Fourier Transform from Fourier Series*. 2 de jul. de 2020. url: <https://www.youtube.com/watch?v=wmUdNKLrWeo>.
- [6] *Shor's factoring algorithm | Quantiki*. url: <https://quantiki.org/wiki/shors-factoring-algorithm#:~:text=Shor%27s%20algorithm%20is%20a%20quantum%20algorithm%20for%20factoring,easily%20broken%2C%20given%20a%20sufficiently%20large%20quantum%20computer..>
- [7] Wikipedia contributors. «Kronecker product». En: *Wikipedia* (27 de mayo de 2023). url: [https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker\\_product](https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product).
- [8] Wikipedia contributors. «List of trigonometric identities». En: *Wikipedia* (30 de mayo de 2023). url: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_trigonometric\\_identities](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities).